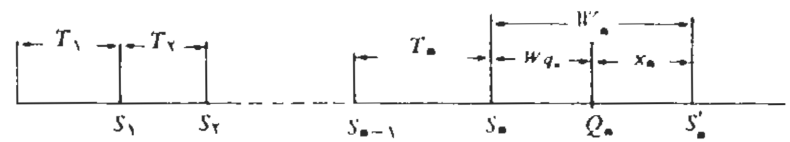
۵

چارچوب کلی سیستمهای صف

دراین فصل، چارچوب و رابطه‌های کلی حاکم بر سیستمهای صف را مورد بررسی قرار می‌دهیم. چنین رابطه‌هایی درمورد همهٔ سیستمها صادق است و بستگی به شرایط ویژهٔ آنها ندارد. حالتهای خاص را درفصول بعد بررسی می‌کنیم.

۱.۵ بیان ترسیمی سیستم برحسب زمان

فرض کنیدکه اولین مشتری در زمان S_1، دومی در S_2 و n امین مشتری درزمان S_n وارد سیستم می‌شود. فاصلهٔ زمانی بین ورود مشتری $(n-1)$ ام و مشتری n ام را با T_n نشان



شکل ۱.۵ رابطهٔ بین ورود، خروج و مدت انتظار مشتریان درسیستم

می‌دهیم. یك مشتری، فرضاً مشتری شماره n، پس از ورود، مدتی درصف می‌ماند وسپس درلحظهٔ Q_n شروع به دریافت خدمت می‌کند، و بالاخره در زمان S'_n از سیستم خارج می‌شود. مدت زمان انتظار این مشتری درصف را با Wq_n، مدت‌زمان توقف او درسیستم را با W_n ومدت‌زمان دریافت خدمت را با x_n نشان می‌دهیم. بدین‌ترتیب، رابطه‌های زیر میان این پارامترها برقرار است.

$$Wq_n = Q_n - S_n \qquad (۱.۵)$$

$$W_n = S'_n - S_n \qquad (۲.۵)$$

$$x_n = S'_n - Q_n \qquad (۳.۵)$$

$$W_n = Wq_n + x_n \qquad (۴.۵)$$

روابط فوق، درشکل ۱.۵ نشان داده شده است.

تعداد مشتریهایی را که تا لحظهٔ t وارد سیستم شده‌اند با $X(t)$ و تعداد مشتریهایی را که تا این لحظه خارج شده‌اند با $X'(t)$ نشان می‌دهیم. به‌عبارت دیگر،

$$X(t) = \{n:\ S_n \leqslant t, S_{n+1} > t\} \qquad (۵.۵)$$

$$X'(t) = \{n:\ S'_n \leqslant t, S'_{n+1} > t\} \qquad (۶.۵)$$

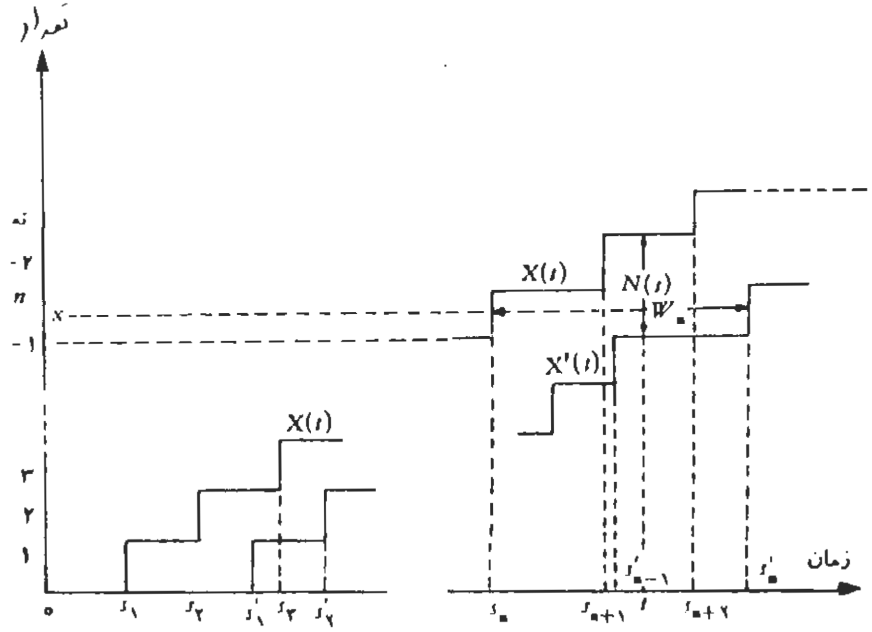
اگر تعداد مشتریهای داخل سیستم را درلحظهٔ t با $N(t)$ بیان کنیم

$$N(t) = X(t) - X'(t) \qquad (۷.۵)$$

شکل ۲.۵، منحنی تغییرات $X(t)$ و $X'(t)$ را نسبت به زمان نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، درزمانهای S_n، $(n = ۱, ۲, \ldots)$ مقدار تابع $X(t)$ و درزمانهای S'_n، مقدارتابع $X'(t)$ دارای جهشی برابرواحد است. فاصلهٔ عمودی بین این دوتابع، درلحظهٔ t، معرف تعداد مشتریهای داخل سیستم دراین لحظه، یعنی $N(t)$، خواهد بود. از طرف دیگر، فاصلهٔ افقی بین محور عمودی (یعنی $t = ۰$) در ارتفاع x، $(n-۱ < x < n)$ تا منحنی $X(t)$، بیانگر زمان ورود مشتری n ام، یعنی S_n وفاصلهٔ افقی بین $X(t)$ و $X'(t)$ درهمین فاصله معرف زمان انتظار مشتری n ام درسیستم، یعنی W_n خواهد بود.

۲.۵ دورهٔ گذرا و دورهٔ پایدار سیستم

معیارهای عمدهٔ بررسی یك سیستم نظیر میانگین تعداد مشتریها درسیستم، زمان انتظار یك مشتری درسیستم (و یا صف) و درصد بیکاری سیستم معمولاً ماهیت تصادفی دارد ولذا میانگین آنها باید مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد. اما، میانگین ویا سایر کمیتهای مربوط به‌آنها نیز خود تابعی اززمان است. دربسیاری ازسیستمها، موقعی‌که زمان از حد مشخصی

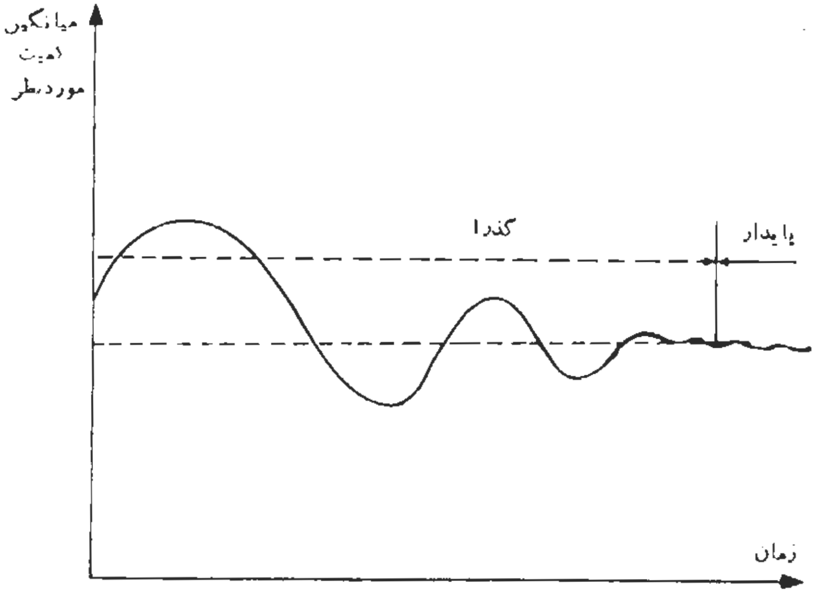


شکل ۲.۵ منحنی تغییرات تعداد مشتریهای سیستم نسبت به‌زمان

تجاوز کند، این کمیتها به سمت اعداد ثابتی میل می‌کنند. مثلا، اگر سیستم درزمان شروع کار، باتعداد زیادی مشتری روبه‌رو باشد، بدیهی است که طول صف زیاد خواهد بود؛ اما، ممکن است به‌تدریج طول صف کم شود و بعد از مدتی میانگین آن تقریباً ثابت بماند. میانگین طول صف در درازمدت (یا میانگین مدت زمان انتظار مشتری درصف) معمولا بستگی به‌شرایط اولیهٔ سیستم ندارد.

با این مقدمه، **دورهٔ گذرا** را مدت زمانی تعریف می‌کنیم که وضعیت سیستم (میانگین معیارهای ارزیابی وسایرعوامل مربوط به‌آن) تغییر می‌کند. این دوره معمولا زمان شروع کار سیستم را در برمی‌گیرد و در آن شرایط اولیه روی تغییرات وضعیت سیستم تأثیر می‌گذارد. **دورهٔ پایدار** دوره‌ای است که تغییرات سیستم درآن مستقل از زمان و شرایط اولیهٔ سیستم است. شکل ۳.۵ نشان می‌دهد که میانگین یکی ازمعیارهای ارزیابی، درشروع کار سیستم درحال نوسان است؛ اما، پس از گذشت مدتی، تقریباً ثابت می‌ماند.

بدیهی است که شرایط دورهٔ گذرا، جز در مورد مطالعات خاص، نمی‌تواند مبنای ارزیابی سیستم قرار گیرد، بلکه آنچه اهمیت دارد تغییرات آن در درازمدت و دردورهٔ پایداراست. ازاین‌رو، درنظریهٔ صف بررسی معیارهای ارزیابی سیستم، دردورهٔ پایدار (در



شکل ۳.۵ دوره‌های گذرا و پایدار

درازمدت) انجام می‌شود، اگرچه بررسیهای محدودی هم درزمینهٔ تغییرات سیستم دردورهٔ گذرا به عمل می‌آید. ضمناً باید درنظر داشت که مطالعهٔ سیستم دردورهٔ گذرا کاری بسیار مشکل، و درمورد بسیاری ازسیستمها، غیرممکن است.

همهٔ سیستمها لزوماً دارای دورهٔ پایدار نیستند. مثلا، اگر آهنگ ورود مشتری بیش از آهنگ خروج آن باشد، طول‌صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌سمت بینهایت میل‌می‌کند. چنین سیستمی هرگز به‌حالت پایدار نمی‌رسد.

۳.۵ رابطهٔ بین معیارهای ارزیابی یك سیستم صف

با استفاده ازشکل ۱.۵، می‌توان مدت زمان انتظار یك مشتری مشخص درسیستم و یا صف وهمچنین تعداد مشتریهای سیستم را درهرلحظه تعیین‌کرد. بیکاری یا مشغول بودن خدمت‌دهندگان درزمانهای مختلف، نیز ازشکل ۲.۵ به‌دست می‌آید. بدیهی است که برای تعیین معیارهای ارزیابی سیستم، اطلاعات مربوط به یك مشتری خاص نمی‌تواند مدنظر باشد، بلکه اطلاعات مربوط به مجموعهٔ مشتریها ملاك ارزیابی تواند بود. باید توجه داشت که حتی یك مشتری مشخص هم، اگر دوبار به‌سیستم مراجعه کند، معمولا به دو نتیجه متفاوت می‌رسد، که علت آن ماهیت احتمالی متغیرهای سیستم است. ضمناً، همان‌طورکه گفته شد

معیارهای ارزیابی با توجه به‌شرایط دورهٔ پایدارسیستم تعیین خواهد شد.

برای ارزیابی سیستم در درازمدت، معیارهای عمده عبارت‌اند از:

L = میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت

L_q = میانگین تعداد مشتریان درصف در درازمدت

W = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم در درازمدت

W_q = میانگین مدت زمان انتظار یك مشتری درصف در درازمدت

π_n = احتمال بودن n مشتری درسیستم در درازمدت

بدیهی است که معیارهای فوق در صورتی دارای معنا خواهد بود که سیستم به دورهٔ پایدار برسد. به‌بیان ریاضی، معیارهای فوق را می‌توان به‌شکل زیر بیان‌کرد:

$$L = \lim_{t\to\infty} \{EN(t)\}$$ (۸.۵)

$$W = \lim_{t\to\infty} E \text{ (مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم)}$$ (۹.۵)

$$\pi_n = \lim_{t\to\infty} P_n(t) = \lim_{t\to\infty} P \text{ (بودن } n \text{ مشتری درسیستم در لحظهٔ } t\text{)}$$ (۱۰.۵)

L_q و W_q نیز به‌طریق مشابه تعریف می‌شوند.

استنتاج لیتل

رابطه‌های بین معیارهای ارزیابی یك سیستم در دراز مدت، با استفاده از استنتاج لیتل، به‌ترتیب زیر، به‌دست می‌آید. این رابطه‌ها که در نظریهٔ صف اهمیت خاصی دارند، درمورد تمام سیستمهای صف صادق هستند.

$$L = \lambda W$$ (۱۱.۵)

$$Lq = \lambda W_q$$ (۱۲.۵)

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$ (۱۳.۵)

در رابطهٔ فوق، λ معرف آهنگ [redacted] ورود مشتری، یا میانگین تعداد بالقوهٔ مشتریانی است که درواحد زمان وارد سیستم می‌شوند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌فرض ثابت بودن λ، L و W متناسب با یکدیگرند. به‌عبارت دیگر، هرچه میانگین‌مدت زمان انتظار مشتریان بیشتر باشد (یعنی سیستم شلوغتر باشد)، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم نیز بیشتر می‌شود. از یك‌طرف، تعداد مشتریهایی که‌داخل‌سیستم‌هستند، مستقیماً بستگی به‌آهنگ ورود مشتریان دارد. از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۱۳.۵)، میانگین مدت زمانی که یك مشتری درسیستم

می‌گذراند، برابراست با میانگین مدت زمانی که درصف می‌گذراند به‌اضافه مدت‌زمانی که مشغول دریافت خدمت است.

دراینجا ازاثبات دقیق ریاضی استنتاج لیتل صرف‌نظر می‌کنیم. لیکن، برای روشن شدن موضوع، فرض کنید که سیستم درزمان t باشد. برحسب تعریف، متوسط زمانی را که یك مشتری درسیستم گذرانیده است، W_1 می‌نامیم. براین اساس، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ t درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با:

تعداد مشتریهایی که تا این لحظه وارد سیستم شده‌اند ضرب در W_1

$$W_1 \cdot X(t)$$ (۱۴.۵)

از طرف دیگر، مجموع مدت زمانی که مشتریها در واحد زمان درسیستم صرف می‌کنند، برابر با میانگین تعداد مشتریان درسیستم است. درنتیجه، کل زمانی که مشتریها تا لحظهٔ t درسیستم گذرانیده‌اند، برابراست با

$$E[N(t)] \cdot t$$ (۱۵.۵)

از رابطه‌های (۱۴.۵) و (۱۵.۵) نتیجه می‌شود.

$$E[N(t)] = \frac{X(t)}{t} \cdot W_1$$ (۱۶.۵)

$X(t)/t$ بیانگرمتوسط تعداد مشتریهایی‌است که در واحد زمان (درفاصلهٔ صفر تا t) وارد سیستم شده‌اند و برحسب تعریف، آهنگ ورود مشتریان نامیده می‌شود.

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{X(t)}{t}$$ (۱۷.۵)

دررابطه (۱۶.۵)، اگر t به‌سمت بینهایت میل کند، درواقع رابطهٔ اول لیتل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵) به‌دست می‌آید.

رابطهٔ بین L و π_n

باتوجه به‌اینکه L، برحسب‌تعریف، میانگین تعدادمشتریها درسیستم است و با درنظر گرفتن رابطهٔ کلی محاسبهٔ میانگین، می‌توان L را به‌شرح زیرمحاسبه‌کرد:

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P \text{ (بودن } n \text{ مشتری در سیستم)} = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n$$ (۱۸.۵)

محاسبهٔ L با استفاده از تبدیل z

اگر تبدیل z احتمالات حدی را با $P(z)$ نشان دهیم، یعنی

$$P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_n z^n$$

$$L=\left.\frac{dP(z)}{dz}\right|_{z=1} \qquad (۱۹.۵)$$

زیرا

$$\frac{dP(z)}{dz}=\sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n z^{n-1}$$

اگر $z=1$ باشد، رابطهٔ (۱۹.۵) به‌رابطهٔ (۱۸.۵) تبدیل می‌شود. به‌همین ترتیب

$$Lq=\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P(\text{بودن } n \text{ مشتری در صف})$$

ازطرف دیگر، درسیستمی با m خدمت‌دهنده، اگر جمعیت مشتریان برابر با n باشد، طول صف برابر با $(n-m)$ خواهد بود، لذا

$$Lq=\sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n \qquad (۲۰.۵)$$

۴.۵ دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن یک سیستم صف

هرسیستم صف مدتی **بیکار** می‌ماند. این دوره ازخروج آخرین مشتری شروع می‌شود و با ورود اولین مشتری بعدی پایان می‌یابد. پس‌از آن، **دورهٔ مشغول بودن** سیستم شروع می‌شود و ادامه می‌یابد تا زمانی که تمام مشتریها ازسیستم خارج شوند. آن گاه، **دورهٔ بیکاری** مجدداً آغاز می‌گردد و همین روند ادامه می‌یابد. مجموعهٔ یک دورهٔ بیکاری ومشغول بودن را یک **چرخهٔ اشتغال** سیستم می‌گویند. درشکل ۴.۵ دوره‌های بیکاری با $I_1, I_2, \ldots, I_n$ و دوره‌های کار با $B_1, B_2, \ldots, B_n$ نشان داده شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، سیستم به‌طور متناوب دوره‌های بیکاری و مشغول بودن را می‌گذراند. اولین چرخهٔ اشتغال سیستم، مدت زمان I_1+B_1 و n امین چرخهٔ آن I_n+B_n است. بـا توجه به تصادفی‌بودن زمانهای ورود مشتری و مـدت خدمت، بدیهی است که دوره‌هـای بیکاری ومشغول‌بودن (و طبیعتاً چرخه‌های‌اشتغال) معمولا متغیر تصادفی‌هستند. اگر در درازمدت، P_b را درصدی ازاوقات بدانیم‌که سیستم مشغول به‌کار است.

شکل ۴.۵ دوره‌های بیکاری و مشغول بودن و چرخه‌های اشتغال

$$P_b=\lim_{n\to\infty}\frac{B_1+B_2+\cdots+B_n}{I_1+B_1+I_2+B_2+\cdots+I_n+B_n} \qquad (۲۱.۵)$$

در حالتی که متغیرهای تصادفی $I_1, I_2, \ldots, I_n$ مستقل و دارای تـوزیع یکـان و همچنین B_1 و B_2 و... نیزدارای همین خاصیت باشند، طبق قانون اعداد بزرگ خواهیم‌داشت:

$$P_b=\frac{E(B)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۲.۵)$$

که $E(I)$ و $E(B)$ به‌ترتیب معرف میانگین دورهٔ بیکاری و دورهٔ مشغول بودن سیستم در دراز مدت هستند ومقدار آنها برای‌مدلهای خاص در فصلهای بعدی محاسبه خواهد شد.

به‌همین‌ترتیب، درصد بیکاری سیستم در درازمدت برابر با $1-P_b$ است. ازطرف دیگر، طبق تعریف، درصدی اززمان کـه سیستم فاقد مشتری است را با π_0 نشان می‌دهیم. بنابراین، تحت شرایط فوق،

$$\pi_0=\frac{E(I)}{E(I)+E(B)} \qquad (۲۳.۵)$$

۵.۵ ضریب بهره‌وری

همان‌طور که قبلا گفتیم، یکی از معیارهای ارزیابی سیستم درصدی اززمان است‌که سیستم کار می‌کند. برای نشان دادن این معیار، ازعاملی به‌نام **ضریب بهره‌وری** استفاده مـی‌شود، که تعریف آن به‌شرح زیراست:

$$\rho=\frac{\text{میانگین کل تقاضا برای دریافت خدمت در واحد زمان}}{\text{کل ظرفیت سیستم برای ارائهٔ خدمت در واحد زمان}} \qquad (۲۴.۵)$$

طبق این تعریف، هرچه مقدار ρ بزرگتر باشد، تقاضا زیادتراست وسیستم باید کار بیشتری انجام دهد وصف طولانی‌تر خواهدشد. برعکس، هرچه ρ کوچکتر باشد، طول صف کوتاهتر است، اما درمقابل، ازامکانات سیستم استفاده‌کمتری به‌عمل می‌آید.

قضیهٔ ۱.۵ دریک سیستم صف با m خدمت‌دهنده، که λ و μ به‌ترتیب معرف آهنگ ورود و آهنگ خدمت است، ضریب بهره‌وری ازرابطهٔ زیربه‌دست می‌آید:

$$\rho=\frac{\lambda}{m\mu} \qquad (۲۵.۵)$$

اثبات: برای محاسبهٔ ρ در رابطهٔ (۲۴.۵)، واحد سنجش صورت و مخرج کسر را تعداد مشتریان درنظر می‌گیریم. درنتیجه،

$\lambda =$ (میانگین مشتریانی‌که درواحد زمان مراجعه می‌کنند) $=$ صورت کسر

(میانگین ظرفیت خدمت‌دهی یک‌خدمت‌دهنده) $\times$ (میانگین تعداد خدمت‌دهنده) $=$ مخرج

$=(m)(\mu)$

بدیهی است که $\rho > 1$ بدین معناست که ظرفیت سیستم از تقاضای وارده به‌آن کمتر است و طول صف مرتب افزایش می‌یابد تا سرانجام به‌بینهایت می‌رسد. ضمناً، در بسیاری از حالتها نشان داده می‌شود که $\rho = 1$ نیز مربوط به‌یك سیستم ناپایدار است. بدین‌ترتیب، معمولاً موقعی سیستم پایدار است که $\rho > 1$ باشد.

$\rho < 1$

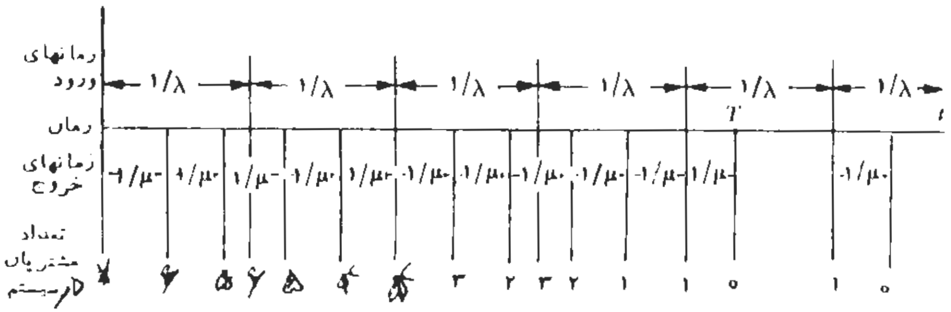
۶.۵ سیستمهای صف‌قطعی

دراین بخش، برای تشریح یك سیستم صف، حالات خاصی را بررسی می‌کنیم که تمام متغیرهای آن قطعی است. معمولاً، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، متغیرهای تصادفی هستند. درسیستمهای صف قطعی، دومتغیر فوق همواره قطعی فرض می‌شود. به‌بیان ریاضی می‌توان گفت که دراین سیستمها، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها و همچنین مدت‌زمان خدمت، متغیرهای تصادفی هستند که واریانس آنها برابر با صفراست.

مطابق با قراردادهایی که‌درفصل اول تشریح شد، سیستمهای قطعی را درحالت کلی با $D/D/\ldots$ نشان می‌دهند. آهنگ ورود مشتری، طبق معمول با λ و آهنگ خدمت با μ بیان می‌شود. اگرمشتریها به‌طورانفرادی واردسیستم شوند و به‌گونه‌ای انفرادی هم‌خدمت دریافت کنند، مدت‌زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دقیقاً برابر با $1/\lambda$ ومدت‌زمان دریافت خدمت نیز برابر با $1/\mu$ خواهد بود.

ابتدا حالت سادهٔ $D/D/1$ را درنظر بگیرید. طبق قرارداد، دراین سیستم یك خدمت‌دهنده وجود دارد، و محدودیتی نیز ازنظر ظرفیت سیستم و جمعیت مشتریان مطرح نیست. بدیهی است که سیستم درصورتی می‌تواند در درازمدت پایدار بماند که $\rho > 1$ یا $\lambda < \mu$ باشد.

به‌عبارت دیگر، سرعت‌خدمت‌دهی درچنین شرایطی باید بیش ازتقاضا برای دریافت خدمت باشد. درغیر این‌صورت، طول صف مرتباً افزایش می‌یابد و به‌بینهایت خواهد رسید. فرض کنید که درلحظهٔ شروع کارسیستم، n مشتری آمادهٔ دریافت خدمت باشند واز آن پس، زمان بین دو ورود $1/\lambda$ باشد. درابتدا، برای ارائهٔ خدمت به مشتریهایی که منتظر هستند، خدمت‌دهنده باید مرتباً کار کند. پس از مدتی که خدمات معوقه ارائه شد، فقط به مشتریان جدید خدمت داده می‌شود. به عبارت دیگر، از لحظهٔ شروع اشتغال سیستم، تا زمان مشخصی، مثلاً T، خدمت‌دهنده دائماً مشغول به‌کاراست واز آن پس درصدی ازاوقات را کار می‌کند (که با ρ نشان داده می‌شود). شکل ۵.۵ معرف این سیستم است. در این سیستم فرض شده است که درلحظهٔ شروع کارسیستم $\cancel{n}$ مشتری درصف منتظر دریافت خدمت بوده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ازلحظهٔ صفر تا T، خدمت‌دهنده مرتباً درحال ارائهٔ خدمت است. از این لحظه به‌بعد، مدتی کارمی‌کند وسپس بیکار می‌ماند. درشکل فوق دورهٔ مشغول‌بودن $1/\mu$ و دورهٔ بیکاری $(1/\lambda - 1/\mu)$ وچرخهٔ اشتغال سیستم به‌مدت $1/\lambda$



شکل ۵.۵ زمانهای ورود و خروج و تعداد مشتریان درمدل $D/D/1$

است. دراین سیستم، دورهٔ گذرا T است و پس از آن دورهٔ پایدار شروع می‌شود. دردورهٔ پایدار هیچ مشتری درصف منتظر نمی‌ماند و صفی نیز تشکیل نمی‌شود. بدین‌ترتیب، رابطه‌های لیتل نیز برقرار خواهد بود. طول مدت دورهٔ گذرا، T، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

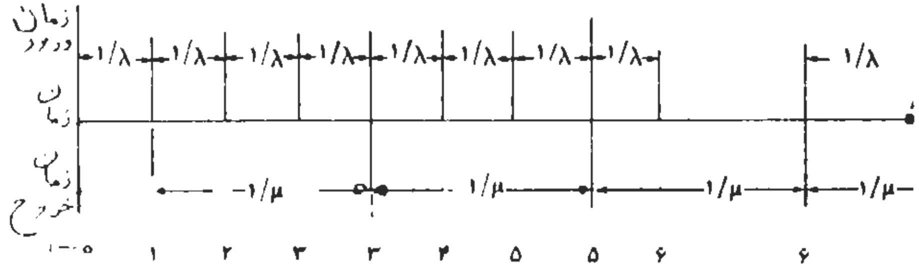
$$[\lambda T] + n = [\mu T] \qquad (۲۶.۵)$$

که n تعداد مشتریهای اولیه است. منظور از $[x]$ مقدار گردشدهٔ x به‌عدد صحیح است، به‌طوری که

$$x - 1 \leqslant [x] \leqslant x$$

حال مدل $D/D/1/K$، که در آن ظرفیت سیستم متناهی، و برابر با K است، را درنظر بگیرید. دراین سیستم هم مشتریها با آهنگ λ مراجعه می‌کنند. لیکن، همه آنها لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند، زیرا هنگامی که سیستم دارای K مشتری باشد، از پذیرش مشتری جدید خودداری می‌کند واین مشتری نمی‌تواند درصف منتظر بماند وبه ناچار از دریافت خدمت محروم خواهد ماند. به‌این‌ترتیب، آهنگ ورود مشتریان کمتر از λ است که‌آن را با $\bar{\lambda}$ نشان‌می‌دهیم. بنابراین، درواحد زمان به‌طورمتوسط تعداد $(\lambda - \bar{\lambda})$ مشتری از ورود به‌سیستم بازمی‌مانند. برای اینکه سیستم به‌حالت پایدار برسد، فقط لازم است که $\bar{\lambda}$ (ونه λ) از μ کوچکتر باشد.

برای سهولت محاسبات، فرض کنید که درلحظهٔ شروع‌کار سیستم تعداد مشتریهایی که منتظر می‌مانند برابر با صفر درنظر گرفته شود. ضمناً، فرض می‌کنیم که $\lambda > \mu$ باشد. (درحالتی که $\lambda < \mu$ باشد، ورود و خروج مشتریها دقیقاً مانند حالت $D/D/1$ است، که قبلاً مورد بررسی قرار گرفت). شکل ۶.۵ این سیستم را بیان می‌کند. در این سیستم فرض شده است که $\lambda = 2\mu$ و $K = 6$ اولین مشتری در زمان $1/\lambda$ وارد می‌شود



شکل ۶.۵ زمانهای ورود و خروج و تعداد مشتریان در مدل $D/D/1/6$

و بلافاصله ارائهٔ خدمت به‌او شروع می‌شود. چون آهنگ خدمت‌دهی کندتر از آهنگ ورود مشتری است، لذا مرتباً به‌طول صف اضافه‌می‌شود تا موقعی که سیستم پر شود (یعنی $N(t) = 6$) در این هنگام، از ورود مشتری جلوگیری به‌عمل می‌آید. از این لحظه به‌بعد، با خروج یك مشتری، مشتری جدیدی وارد سیستم می‌شود و این کار ادامه می‌یابد. در این مدل نیز طول دورهٔ گذرا، T، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (با فرض اینکه λ/μ برابر عدد صحیحی مانند m باشد).

$$T = \frac{K}{\lambda - \mu} \qquad (۲۷.۵)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، بعد از دورهٔ گذرا، تعداد مشتریان داخل سیستم همواره برابر K است، اما قبل از آن، تعداد مشتریان از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$N(t) = X(t) - X'(t) = [\lambda t] - \left[\frac{t - 1/\lambda}{1/\mu}\right] = [\lambda t] - [\mu t - \mu/\lambda] \qquad (۲۸.۵)$$

بنابراین، به‌طور خلاصه

$$N(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } t < 1/\lambda \text{ باشد،} \\ [\lambda t] - [\mu t - \mu/\lambda] & \text{اگر } 1/\lambda \leqslant t \leqslant T \text{،} \\ K & \text{اگر } t > T \text{،} \end{cases}$$

به‌این‌ترتیب، باتوجه به‌شکل ۶.۵ مشاهده می‌شود که بعد ازدورهٔ گذرا، که T است، تعداد مشتری در سیستم همواره K باقی می‌ماند. درهمین مثال، از هر سه مشتری که مراجعه کنند، دقیقاً یکی از آنها وارد سیستم می‌شود و دو مشتری دیگر از ورود باز می‌مانند. بنابراین، $\bar{\lambda} = \lambda/3$ و $\rho = (\lambda/\mu) = 1$. برای نشان دادن صحت رابطهٔ لیتل باید توجه داشت که در درازمدت $L = 6$ است. مدت‌زمان انتظار یك مشتری برابر با $6/\mu$ است، زیرا در

$\frac{\lambda}{۳}$

لحظهٔ ورود یك مشتری دقیقاً ۵ مشتری دیگر در سیستم هستند واین مشتری باید صبر کند تا آنها خارج‌شوند، یعنی $W_q = 5/\mu$ و به‌همین‌ترتیب $W = 6/\mu$. درنتیجه با درنظر گرفتن فرض $\lambda = 3\mu$، نتیجه می‌شود،

$$\bar{\lambda} W = \frac{\lambda}{3} \cdot \frac{6}{\mu} = 2\frac{\lambda}{\mu} = 6$$

مسائل

۱. دریك سیستم صف با دوخدمت دهنده، ورود و خروج مشتریها طبق جدول زیر است. فرض می‌کنیم که انتخاب مشتری درصف براساس نوبت باشد. میانگین زمان انتظار مشتریها، طول‌صف، وتعداد افرادی که در حال گرفتن خدمت هستند، آهنگ ورود مشتری و آهنگ خدمت‌دهی را محاسبه‌کنید. نمودار جمعیت مشتریان را نسبت به‌زمان رسم‌کنید.

شمارهٔ مشتری	ساعت ورود	ساعت خروج
۱	۱	۱ : ۳۰
۲	۱ : ۱۰	۱ : ۲۵
۳	۱ : ۲۰	۱ : ۴۰
۴	۱ : ۳۵	۱ : ۵۵
۵	۲ : ۱۰	۲ : ۴۰
۶	۲ : ۱۵	۲ : ۳۵
۷	۲ : ۲۰	۲ : ۵۵
۸	۲ : ۳۰	۲ : ۵۸
۹	۳ : ۰۵	۳ : ۳۵
۱۰	۳ : ۰۸	۳ : ۲۵
۱۱	۳ : ۱۵	۳ : ۳۲
۱۲	۳ : ۱۹	۳ : ۴۰
۱۳	۳ : ۳۶	۰۰۰۰

۲. دریك سیستم $D/D/1/7$ آهنگ خدمت دهی بـرابـر بایك پنجم و آهنگ مراجعه مشتری برابر بـا یك سوم است. میانگین زمان انتظار هر مشتری درصف، در دراز مدت، چیست؟ ضریب بهره‌وری را محاسبه کنید. صحت رابطه‌های روابط‌لیتل را نشان دهید. آیا این‌سیستم حالت پایدار دارد؟

۳. ثابت کنید که درهرسیستم صف بایك خدمت دهنده، همیشه رابطه‌های زیر برقرار است:

$$1)\ \pi_0 = 1-\rho \qquad 2)\ L = L_q + (1-\pi_0) \qquad 3)\ L = L_q + \rho$$

٦

مدلهای نمایی درسیستمهای صف

مقدمه

منظور از مدلهای نمایی، مدلهایی است کـه درآنها، دومتغیر تصادفی زیر دارای توزیع‌ـ نمایی باشد:

الف. زمان بین دو ورود متوالی مشتریها

ب. مدت خدمت

مدلهای نمایی از مهمترین نمونه‌هـای سیستمهای صف هستند. اهمیت آنها از آنجا ناشی می‌شودکه از نظر محاسباتی ساده‌ترین مدلها محسوب می‌شوند و درعین حال، بسیاری از مسائل واقعی را می‌توان درچارچوب آنها گنجانید.

طبق آنچه‌که درفصل اول گفته شد، بـرای بیان سیستمهای صف و طبقه‌بندی آنها، ازقراردادی بشکل $A/B/m/K/C/Z$ استفاده می‌شود. اگر زمان بین‌دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی باشد، حرف M جایگزیـن A می‌شود. به همین ترتیب، در صورتی که‌مدت خدمت هم‌نمایی باشد، به‌جای حرف B حرف M قرارمی‌گیرد. بنابراین، مدلهای نمایی، به طور کلی، به صورت $M/M/\ldots$ نشان داده می‌شوند. در نظریهٔ صف، بمدلهای نمایی فرایند تولد و مرگ هم می‌گویند.

دراین فصل، ویژگیهای‌عمومی مدلهای نمایی درحالت کلی وخصوصیات آنها در حالات خاص را مورد بررسی قراردهیم.

۱.۶ فرایند تولد و مرگ

برای تشریح این فرایند، جمعیتی را درنظر بگیرید که تعداد آن هر لحظه می‌تواند افزایش یابد (تولد)، و یا از آن کاسته گردد (مرگ). دریک سیستم صف، مشتریهای داخل سیستم معرف جمعیت فوق‌الذکر است. در فرایند تولد و مرگ، ورود مشتری جدید درحکم تولد وخروج یکی ازمشتریها (پس ازدریافت خدمت)، در حکم مرگ محسوب می‌شود. ضمناً، ویژگی‌عمدهٔ فرایند تولد ومرگ این‌است که‌فاصلهٔ زمانی بین دوتولد یا دومرگ براساس توزیع‌نمایی است. به‌عبارت‌دیگر، دراین‌فرایند، تعداد تولدها یامرگها دریك فاصلهٔ‌زمانی مشخص براساس فرایندپواسون است. به‌تعبیردقیقتر، فرایندتولد ومرگ براساس فرضهای زیر ایجاد می‌شود.

فرض ۱. یك لحظهٔ مشخص را درنظر بگیرید، که جمعیت سیستم درآن برابر با n باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تایك تولد صورت گیرد (یك مشتری جدید واردشود)، متغیری تصادفی بـا توزیع نمایی و پـارامتر λ_n است. به‌عبارت دیگر، احتمال ورود یك مشتری درفاصلهٔ کوتاه Δt متناسب بـا طول Δt و λ_n، و بـه‌طور دقیقتر بـرابـر است با $\lambda_n \Delta t + \theta(\Delta t)$. بـه همین ترتیب، احتمال ورود بیش ازیك مشتری در فاصلهٔ کوتاه Δt، صفر، یا به‌طور دقیقتر برابر با $\theta(\Delta t)$ است. آهنگ ورود مشتری (یا آهنگ تولد)، یعنی λ_n، می‌توانـد به‌جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمان فرض می‌شود. λ_0 لزوماً برابر با صفر نیست

فرض ۲. یك لحظهٔ مشخص را در نظر بگیرید که درآن جمعیت سیستم برابر با n باشد. مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك مرگ صورت گیرد (یا یك مشتری خارج شود)، متغیری تصادفی بـا توزیع نمایی و پـارامتر μ_n است. آهنگ خروج مشتری (یا مرگ)، یعنی μ_n، نیز می‌تواند بـه جمعیت سیستم بستگی داشته باشد، ولی مستقل اززمـان فرض می‌شود. μ_0 برابر با صفر است زیرا جمعیت منفی معنا ندارد.

بنابراین، ازفرضهای ۱ و ۲ نتیجه می‌شود کـه درفرایند تولد ومرگ، درهر لحظه حداکثر یك مشتری وارد یاخارج می‌شود. علت این امراین است که ورود وخروج مشتریها طبق فرایند پواسون است. می‌دانیم که دریك فرایند پواسون، دو پیشامد همزمان نمی‌تواند رخ دهد.

آهنگ تولد (یا ورود مشتری)، یعنی λ_n، و همچنین آهنگ مـرگ، یعنی μ_n، در سیستمهای مختلف می‌تـوانـد متفاوت بـاشد. یك حالـت خـاص، $\lambda_n = \lambda$ یـا $\mu_n = \mu$ (به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$) است. درحـالـت خاص دیگر، $\lambda_n = n\lambda$ و یـا $\mu_n = n\mu$ است. دراین حالت، متناسب با افزایش جمعیت، آهنگ ورود یا خروج نیز افزایش می‌یابد.

طبق فرضهای فوق، درمدت زمان کوتاه، جمعیت مشتریهای داخل سیستم حداکثر یك نفر افزایش یا کاهش می‌یابد، مشروط براینکه طبق فرایند تولد ومرگ عمل کند.

۲.۶ بیان فرایند تولد ومرگ درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف

تعداد مشتری داخل سیستم را دریك لحظه، حالت سیستم تعریف کنید. طبق خاصیت فرایند تولد ومرگ، افزایش یاکاهش این تعداد مشتری، فقط بستگی به‌حالت سیستم دارد ومستقل از گذشتهٔ آن است، بنابـراین، خاصیت مارکوفی بودن درمـورد این فرایند صادق است. ضمناً، مدت زمانی هم‌که طول‌می‌کشد تاحالت سیستم تغییر کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌این‌ترتیب، این فرایند درچارچوب زنجیرهٔ مارکوف پیوسته قرارمی گیرد.

برای مشخص‌کردن ماتـریس آهنگ‌گذار، بایـد عناصر این ماتریس، یعنی q_{ij} را، به‌ازای تمام مقادیر i و j، محاسبه‌کرد. می‌دانیم‌که طبق تعریف، به‌ازای $j \neq i$،

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to \infty} \frac{p(\Delta t \text{ درمدت } ،j \text{ به } i \text{ تغییرحالت سیستم از})}{\Delta t}$$

بنابراین، اگر $j = i + 1$ باشد (یك تولد)،

$$q_{i,i+1} = \lambda_i \tag{۱.۶}$$

واگر $j = i - 1$ باشد (یك مرگ)،

$$q_{i,i-1} = \mu_i \tag{۲.۶}$$

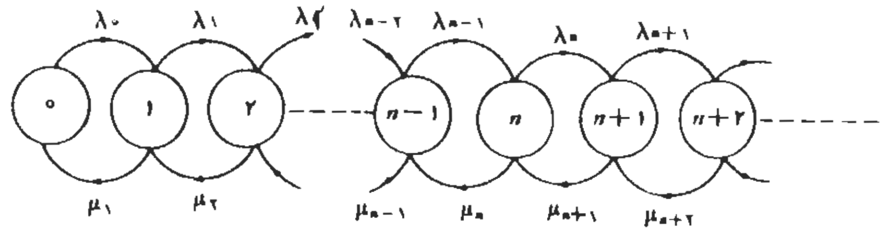
وجود خواهد داشت. در سایر موارد

(۳.۶) اگر $j \# i - 1$ یا $j \# i + 1$ باشد، $q_{ij} = 0$ خواهد بود.

به این‌ترتیب، ماتریس آهنگ گذار فرایند تولدومرگ به‌شکل زیر درمی‌آید.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \mu_1 & -(\mu_1+\lambda_1) & \lambda_1 & 0 & 0 \cdots\cdots 0 \\ 0 & \mu_2 & -(\mu_2+\lambda_2) & \lambda_2 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \end{bmatrix} \tag{۴.۶}$$

به‌جای استفاده از ماتریس فوق، می‌تـوان از نمودارآهنگ برای نشان‌دادن فرایند مارکوف استفاده کرد. چنین نمودار آهنگی درشکل ۱.۶ نشان داده شده‌است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در فرایند تولد ومرگ، از یك حالت، تنها می‌توان به‌حالتهای مجاور آن حرکت کرد.



شکل ۱.۶ نمودار آهنگ درفرایند تولد و مرگ

معادلهٔ تعادلی درسیستمهای نمایی

همان‌طورکه قبلا گفته شد، π_n معرف این حالت است که در درازمدت n مشتری درسیستم باشد. به‌عبارت دیگر، π_n نشان‌دهندهٔ درصدی از زمان است کـه سیستم دارای n مشتری است. به‌بیان ریاضی

$$\pi_n = \lim_{t \to \infty} p[N(t) = n] \qquad (۵.۶)$$

برای محاسبهٔ π_n درفرایند تولد و مرگ، شکل ۱.۶ به‌کار گرفته می‌شود. ابتدا از حالت صفر، که هیچ مشتری درسیستم وجود ندارد، شروع می‌کنیم. همان طورکه نمودار آهنگ نشان می‌دهد، حالت سیستم فقط درصورتی تغییر می‌کند که یك مشتری جدید وارد شود. دراین صورت، حالت سیستم نیز «یك» خواهد شد. تغییر حالت سیستم ازصفر به‌یك (یعنی ورود یك مشتری) با آهنگ λ_0 انجام می‌شود. به‌همین‌ترتیب، با درنظر گرفتن این مطلب که ورود به‌حالت صفرنیز فقط با تغییر حالت سیستم از یك به‌صفر امکانپذیر است، آهنگ ورود به‌این حالت نیز برابر بـا μ_1 خواهد بود. درنتیجه، معادلهٔ تعادلی درحالت صفر برابراست با

$$\lambda_0 \pi_0 = \mu_1 \pi_1 \qquad (۶.۶)$$

اکنون حالت ۱ را درنظر بگیریـد. تغییر حالت سیستم، به دو طریق، ورود مشتری جدید (با آهنگ λ_1) یـا خروج تنها مشتری داخل سیستم (با آهنگ μ_1) میسر است. از طرف دیگر، از دوطریق نیز می‌توان به‌حالت ۱ رسید: از حالت صفر با ورود یك مشتری یا از حالت ۲ با خروج یکی ازمشتریهای داخل سیستم.بنابراین، معادلهٔ تعادلی برای این حالت عبارت است از:

$$(\lambda_1 + \mu_1)\pi_1 = \lambda_0 \pi_0 + \mu_2 \pi_2 \qquad (۷.۶)$$

به‌همین ترتیب، معادلهٔ تعادلی برای حالت n به‌شرح زیرخواهد بود:

$$(\lambda_n + \mu_n)\pi_n = \lambda_{n-1}\pi_{n-1} + \mu_{n+1}\pi_{n+1} \qquad (۸.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۶.۶) و (۷.۶) و (۸.۶) نتیجه می‌شود:

$$\pi_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1}\pi_0 \qquad (۹.۶)$$

$$\pi_2 = \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2}\pi_0 \qquad (۱۰.۶)$$

.
.
.
.

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots\cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots\cdots \mu_n}\pi_0 \qquad (۱۱.۶)$$

برای سهولت از قرارداد زیر استفاده می‌کنیم.

$$C_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \qquad (۱۲.۶)$$

n = ۱,۲, ---

درنتیجه رابطهٔ (۱۱.۶) را می‌توان به‌صورت زیرخلاصه کرد:

$$\pi_n = C_n \pi_0 \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (۱۳.۶)$$

ازطرف دیگر می‌دانیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$$

یا

$$\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \pi_0 = \pi_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\right] = 1$$

درنتیجه

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} C_i} \qquad (۱۴.۶)$$

به این ترتیب، با استفاده از رابطه‌های (۱۲.۶) و (۱۳.۶) و (۱۴.۶) تابع توزیع تعداد مشتری در سیستم، در درازمدت، به‌دست می‌آید.

شرط پایدار بودن سیستمهای نمایی

با توجه به رابطهٔ (۱۴.۶)، ملاحظه‌می‌شود که درصورتی π_0 مثبت است که $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$ متناهی، یعنی سری C_1 و C_2 و ... همگرا باشد. اگرچنین نباشد $\pi_0 = 0$ خواهد بود. به‌همین ترتیب، از رابطهٔ (۱۳.۶) نتیجه می‌شود که به‌ازای تمام مقادیر n، $\pi_n = 0$ است. درنتیجه، احتمال اینکه سیستم خالی یا دارای n مشتری باشد ($n = 1, 2, \ldots$)، برابر با صفر است. معنای این موضوع این است که دردرازمدت، تعداد مشتریهای داخل سیستم از هرعددی مانند n بیشتر (یعنی برابر با بینهایت) است. درچنین حالتی سیستم ناپایدار است. بنابراین، در فرایند تولد ومرگ شرط پایداری سیستم این است که

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \infty \qquad (۱۵.۶)$$

محاسبهٔ معیارهای ارزیابی مدلهای نمایی

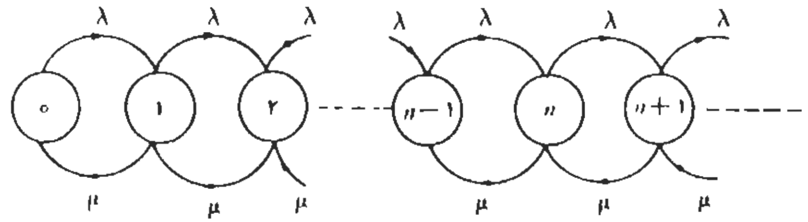
پس ازمحاسبهٔ π_0 و π_n (به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$)، میانگین تعداد مشتری درسیستم، یعنی L از رابطهٔ (۱۰.۵) به‌دست می‌آید. آن‌گاه، با استفاده ازروابط موسوم به استنتاج لیتل، یعنی رابطهٔ (۱۱.۵)، معیار دیگر ارزیابی، میانگین مدت زمان انتظار مشتری درسیستم یا W به‌دست می‌آید. به‌همین ترتیب، L_q و W_q را می‌توان با کمک روابط (۱۲.۵) و (۱۳.۵) محاسبه کرد.

بررسی نمونه‌های خاص مدلهای نمایی

درادامهٔ این بخش، انواع مدلهای نمایی را بررسی و معیارهای ارزیابی آنها را به‌دست می‌آوریم. برای تعیین این معیارها، ابتدا λ_n و μ_n را به‌ازای nهای مختلف مشخص و π_0 و π_n را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه به‌بررسی L و W وسایر عوامل می‌پردازیم. درتمام این مدلها فرض می‌کنیم که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها وهمچنین خدمت‌نمایی است.

۳.۶ مدل $M/M/1$

این مدل متداولترین نمونهٔ مدل صف است، که به مدل کلاسیک نیزموسوم است. دراین‌مدل ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون با پارامتر λ است. آهنگ ورود مشتری مستقل ازجمعیت



شکل ۲.۶ نمودار آهنگ مدل کلاسیک

داخل سیستم فرض می‌شود. لذا، به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $\lambda_n = \lambda$ است. ازطرف دیگر، چون یک خدمت دهنده بیشتر وجود ندارد، آهنگ خروج مشتریان برابر با آهنگ خدمت خواهد بود. در نتیجه، به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$، $\mu_n = \mu$ است. دراین مدل، $\mu_0 = 0$ فرض شده است، زیرا درصورتی که مشتری درسیستم نباشد، خدمت‌دهی هم وجود ندارد. نمودار آهنگ این مدل مطابق شکل ۲.۶ است.

براساس رابطهٔ (۱۲.۶)

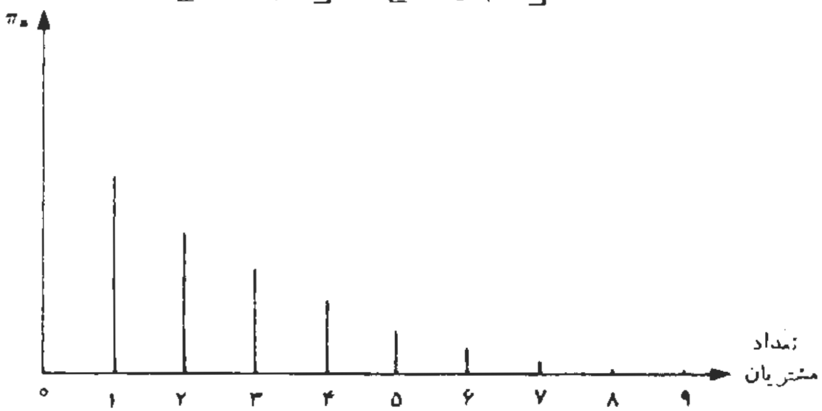
$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\cdots\mu_n} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$$

اما برحسب تعریفی که از ضریب بهره‌وری به‌عمل آمد، $\rho = \lambda/\mu$ است.

$$C_n = \rho^n \qquad (۱۶.۶)$$

درنتیجه، بافرض $\rho < 1$

$$\pi_0 = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right]^{-1} = \left[1+\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n\right]^{-1} = 1-\rho \qquad (۱۷.۶)$$



شکل ۳.۶ احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت، مدل $M/M/1$

و

$$\pi_n = C_n \pi_0 = (1-\rho)\rho^n \qquad (۱۸.۶)$$

شکل ۳.۶، احتمال تعداد مشتریهای داخل سیستم را در درازمدت نشان می‌دهد.

مثال ۱.۶ کتابخانه‌ای عمومی که فقط یك کتابدار دارد را درنظر بگیرید. اعضای کتابخانه طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۰ نفر درساعت وارد می‌شوند. مدت زمانی که طول می‌کشد تا این کتابدار به تقاضای یك عضو رسیدگی کند، متغیری تصادفی با میانگین ۵ دقیقه است. درچند درصد وقت، این کتابدار بیکار است؟ احتمال اینکه ۳ نفر منتظر باشند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند، چقدراست؟

حل: دراین‌مدل $\lambda = 10$ و $\mu = 12$ است. به‌عبارت دیگر، به‌طورمتوسط‌درهرساعت ده‌نفر وارد کتابخانه می‌شوند و کتابدار ظرفیت ارائهٔ خدمت به ۱۲ نفر درساعت را دارد. بدین ترتیب

$$\rho = \frac{10}{12}$$

درصد بیکاری کتابدار برابر با π_0 است و طبق رابطهٔ (۱۷.۶) به‌دست می‌آید.

$$\pi_0 = 1-\rho = \frac{1}{6}$$

احتمال اینکه سه نفر منتظر دریافت خدمت از کتابدار باشند، برابر با π_4 است، زیرا اگر ۴ نفر درسیستم باشند، یکی از آنها مشغول دریافت خدمت است و سه نفر دیگر درصف منتظر هستند. طبق رابطهٔ (۱۸.۶)

$$\pi_4 = (1-\rho)\rho^4 = \frac{1}{6}\times\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0{,}08$$

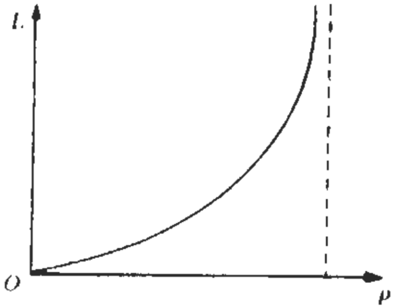
محاسبهٔ L

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n(1-\rho)\rho^n = (1-\rho)\,\rho\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1}$$

از رابطهٔ (۷۰.۲) درمورد بسط سریها نتیجه می‌شود که:

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

پس



شکل ۴.۶ رابطهٔ بین L و ρ درمدل $M/M/1$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda} \qquad (۱۹.۶)$$

رابطهٔ بین L و ρ درشکل ۴.۶ نشان داده‌شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، ρ باید کوچکتر ازیك باشد. درغیر این‌صورت طول صف بینهایت و سیستم ناپایدار خواهد شد.

میانگین طول صف یا L_q را نیز می‌توان حساب کرد. درهر لحظه چنانچه سیستم دارای n مشتری باشد، طول صف برابر با $(n-1)$ خواهد بود. لذا،

$$L_q = \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\pi_n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\pi_n - \sum_{n=1}^{\infty}\pi_n$$

جملهٔ اول برابر L و جملهٔ دوم برابر با $(1-\pi_0)$ است. پس،

$$L_q = L-(1-\pi_0) = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۰.۶)$$

محاسبهٔ مدت زمان انتظار درسیستم

فرض‌کنید T_s معرف مدت‌زمان انتظار درسیستم و T_q مدت‌زمان انتظار درصف باشد. می‌دانیم که، طبق تعریف

$$W_q = E(T_q)\ ,\ W = E(T_s)$$

W و W_q را می‌توان با استفاده ازرابطهٔ «لیتل» به‌دست آورد،که

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} \qquad (۲۱.۶)$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۲۲.۶)$$

مثال ۲.۶ مثال ۱.۶ را مجدداً درنظر بگیرید. به‌طور متوسط یك مشتری چه‌مدت منتظرمی‌ماند تا کتابدار به‌تقاضای او رسیدگی کند؟ چند نفر به‌طور متوسط منتظر هستند تا کتابدار به‌تقاضای آنها رسیدگی کند؟ ازلحظهٔ ورود یك مشتری تا لحظه‌ای که کار او تمام شود، به‌طور متوسط چه‌مدت طول می‌کشد؟

حل: سه سؤال موردنظر به‌ترتیب مبین مقادیر W_q و L_q و W است، که از رابطه‌های (۲۲.۶)، (۲۰.۶) و (۲۱.۶) به‌دست می‌آید.

$$W_q=\frac{10}{12(2)}=\frac{10}{24}\ \text{ساعت}=25\ \text{دقیقه}$$

$$L_q=\frac{100}{12(2)}=\frac{100}{24}=4.17$$

$$W=\frac{1}{2}\ \text{ساعت}=30\ \text{دقیقه}$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود $W=W_q+1/\mu$ است.

تابع توزیع مدت‌زمان انتظار مشتری درمدل $M/M/1$

چنانچه علاوه‌بر میانگین زمان انتظار مشتری در سیستم یا صف، که از رابطه‌های (۲۱.۶) و (۲۲.۶) به‌دست می‌آیند، اطلاعات بیشتری موردنیاز باشد، باید توابع توزیع این متغیرهای تصادفی را با استفاده ازقضیهٔ زیر تعیین کرد.

قضیهٔ ۱.۶ چنانچه T_s و T_q به‌ترتیب معرف مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم وصف، دریك مدل $M/M/1$ باشند، خواهیم داشت

$$P(T_q=0)=\pi_0=1-\rho \qquad (۲۳.۶)$$

$$P(T_q>x)=\rho e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad (۲۴.۶)$$

$$P(T_s>x)=e^{-\mu(1-\rho)x} \qquad (۲۵.۶)$$

اثبات. رابطهٔ (۲۳.۶) واضح است. نحوهٔ اثبات رابطه‌های (۲۴.۶) و (۲۵.۶) مشابه است و فقط به‌اثبات آخرین رابطه می‌پردازیم. فرض کنید که درلحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، تعداد مشتریها در سیستم N باشد. در این‌صورت، با استفاده از روابط احتمال شرطی خواهیم داشت.

$$P(T_s>x)=\sum_{n=0}^{\infty}P(T_s>x|N=n)P(N=n) \qquad (۲۶.۶)$$

ازطرف دیگر، مدت‌زمانی که‌این مشتری درصف منتظر می‌ماند، برابراست با:

$$T_q=X_1+\dots+X_n$$

که X_i معرف مدت‌زمان دریافت خدمت توسط مشتری i ام است. به‌همین‌ترتیب

$$T_s=T_q+X_{n+1}$$

که X_{n+1} نشاندهندهٔ مدت زمان دریافت خدمت توسط خود مشتری است. چون مجموع $n+1$ متغیر تصادفی مستقل نمایی با پارامتر μ است، یك‌متغیرتصادفی ارلانگی با پارامترهای $n+1$ و μ خواهد شد، بنابراین

$$P(T_s>x|N=n)=P\left(\sum_{i=1}^{n+1}X_i>x\right)=\int_x^{\infty}\mu e^{-\mu y}\frac{(\mu y)^n}{n!}dy \qquad (۲۷.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۱۸.۶) و (۲۷.۶) رابطهٔ (۲۶.۶) را محاسبه می‌کنیم.

$$P(T_s>x)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(1-\rho)\int_x^{\infty}\mu e^{-\mu y}\frac{(\mu y)^n}{n!}dy$$

$$=\mu(1-\rho)\int_x^{\infty}e^{-\mu y}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n(\mu y)^n}{n!}dy \qquad (۲۸.۶)$$

ازطرف دیگر با بهره‌گیری ازبسط سریهای نمایی نتیجه می‌شود

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n(\mu y)^n}{n!}=e^{\rho\mu y}=e^{\lambda y} \qquad (۲۹.۶)$$

پس از جایگزینی رابطهٔ فوق و محاسبهٔ انتگرال، رابطهٔ (۲۵.۶) اثبات می‌شود. مشاهده می‌شودکه T_s دارای توزیع نمایی با پارامتر $(\mu-\lambda)$ است. میانگین این متغیر تصادفی نمایی برابراست با

$$W=E(T_s)=\frac{1}{\mu-\lambda}$$

که قبلا با استفاده از استنتاج لیتّل به‌دست آمد.

مثال ۳.۶ درمثال ۲.۶، احتمال اینکه مشتری اصلا منتظر نماند، چقدراست؟ احتمال اینکه حداقل یك ساعت منتظر بماند، چقدراست؟

$$P(T_q=0)=\pi_0=1-\rho=\frac{1}{6}$$

$$P(T_q>1)=\frac{5}{6}e^{-12(\frac{1}{6})}=\frac{5}{6}e^{-2}=0/11$$

محاسبهٔ احتمال طول مطلوب صف درمدل $M/M/1$

دربسیاری از سیستمها این موضوع اهمیت دارد که طول صف از حد معینی مثلاً n تجاوز نکند. درصدی از اوقات که طول صف بیش از حد مطلوب باشد، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

حداقل

$$P(\text{طول صف}>n)=P(\text{بودن } n+1 \text{ مشتری در سیستم})=\sum_{i=n+2}^{\infty}\pi_i$$

$$=\sum_{i=n+2}^{\infty}\rho^i(1-\rho)=\rho^{n+2} \qquad (۳۰.۶)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، این احتمال به‌طور تصاعدی کاهش می‌یابد.

مثال ۴.۶ درمثال ۱.۶، احتمال اینکه تعداد اعضای کتابخانه‌که منتظرند تا نوبت آنها برسد بیش از ۵ نفر باشد، چقدراست؟

$$P(\text{طول صف}>5)=\rho^7=\left(\frac{5}{6}\right)^7$$

۴.۶ مدل $M/M/1/K$، سیستم باظرفیت متناهی

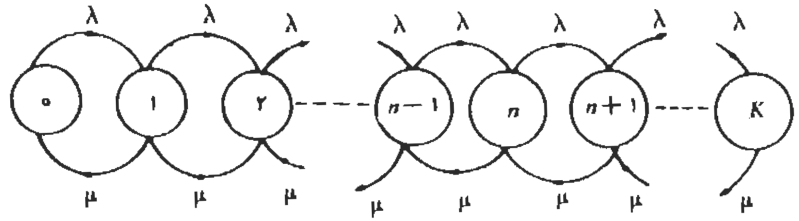
این مدل از همه‌نظر مثل مدل قبلی است، به‌استثنای اینکه درآن ظرفیت سیستم متناهی و برابر با K است. به علت این محدودیت، چنانچه مجموعاً K مشتری درسیستم بمانند، از ورود مشتریهای جدید جلوگیری‌می‌شود. درضمن‌فرض براین است که مشتریهایی که به‌علت نبودن جا وارد سیستم نمی‌شوند، مجدداً مراجعه نمی‌کنند.

دراین سیستم داریم

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda\ , & n<K\\ 0\ , & n\geqslant K\end{cases} \qquad (۳۱.۶)$$

$$\mu_n=\mu \quad , n=1,2,\cdots K \qquad (۳۲.۶)$$

نمودارآهنگ این مدل درشکل ۵.۶ نشان داده شده است.



شکل ۵.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/1/K$

محاسبهٔ آهنگ ورود مشتریان

دراین مدل، آهنگ مراجعهٔ مشتریها را با λ و آهنگ ورود آنها را با $\bar{\lambda}$ نشان می‌دهیم. این دو کمیت با یکدیگر متفاوت هستند؛ زیرا، تمام مشتریهایی که مراجعه می‌کنند لزوماً وارد سیستم نمی‌شوند. درصدی از مشتریها به‌علت تکمیل ظرفیت از ورود به سیستم بازمی‌مانند، که این درصد برابراست بادرصدی اززمان که سیستم دارای K مشتری است. به‌این‌ترتیب، ازورود π_k درصد مراجعین جلوگیری به‌عمل‌می‌آید وفقط $(1-\pi_k)$ درصد مراجعین وارد می‌شوند.

$$\bar{\lambda}=\lambda(1-\pi_k) \qquad (۳۳.۶)$$

ضریب بهره‌وری ρ

دراین مدل، ضریب بهره‌وری طبق تعریف برابر با $\rho=\frac{\lambda}{\mu}$ و طبق‌خاصیت این سیستم همواره‌کوچکتر ازیک است. دراین مدل λ/μ می‌تواند مقداری بیش از یک داشته باشد و درعین حال سیستم پایدار بماند، زیرا تعداد مشتریهای داخل سیستم هرگز به بینهایت نمی‌رسد وحداکثر تعداد آنها K خواهد بود.

محاسبهٔ احتمالات حدی

طبق رابطهٔ (۱۲.۶)

$$C_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n=r^n & , n\leqslant K\\ 0 & , n>K\end{cases} \qquad (۳۴.۶)$$

(درعبارت فوق، (λ/μ) را با r نشان می‌دهیم تا از $\rho=(\bar{\lambda}/\mu)$ متمایز گردد.)

از رابطهٔ (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_0 = \left(1+\sum_{n=1}^{k} C_n\right)^{-1} = \frac{1-r}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۵.۶)$$

به‌همین ترتیب، طبق رابطهٔ (۱۳.۶)،

$$\pi_n = \frac{(1-r)r^n}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۶.۶)$$

درحالت خاصی که $r=1$ باشد

$$\pi_n = \frac{1}{k+1} \qquad (۳۷.۶)$$

محاسبهٔ L و L_q و W و W_q

$$L = \sum_{n=0}^{k} n\pi_n = \frac{(1-r)r}{1-r^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} nr^{n-1}$$

از طرف دیگر

$$\sum_{n=0}^{k} nr^{n-1} = \sum_{n=0}^{k} \frac{d(r^n)}{dr} = \frac{d}{dr}\sum_{n=0}^{k} r^n = \frac{d}{dr}\left(\frac{1-r^{k+1}}{1-r}\right) = \frac{1-(k+1)r^{k+1}}{(1-r)^2}$$

پس

$$L = \frac{r}{1-r} - \frac{(k+1)r^{k+1}}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۸.۶)$$

به‌همین ترتیب

$$L_q = L-(1-\pi_0) = L - \frac{r(1-r^k)}{1-r^{k+1}} \qquad (۳۹.۶)$$

برای محاسبهٔ W و W_q، از روابط لیتل استفاده می‌کنیم. باید توجه‌داشت که در این رابطه‌ها آهنگ ورود مشتری $\bar{\lambda}$ است (نه λ). بنابراین، بـا مشخص بودن L و L_q می‌توان W و W_q را نیز به‌دست آورد.

۵.۶ مدل $M/M/m$

این مدل m خدمت‌دهنده دارد. ازنظر ظرفیت صف وجمعیت مشتری هـم محدودیتی برای

آن فرض نمی‌شود. دراین مدل، به‌ازای تمام مقادیر n، آهنگ ورود مشتری ثابت و برابر با λ است. آهنگ خدمت‌دهی هر خدمت دهنده μ فرض می‌شود. چنانچه تعداد مشتری داخل سیستم برابربا n باشد، دوحالت پیش‌می‌آید. یکی اینکه $n<m$ باشد، که دراین صورت n خدمت‌دهنده مشغول به‌کارند و آهنگ خروج مشتریها بـرابـر با $n\mu$ است. دوم اینکه $m \leqslant n$ باشد، که دراین حالت حداکثر m خدمت‌دهنده کار می‌کنند وآهنگ خروج برابر با $m\mu$ است. پس به‌طورخلاصه،

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n\leqslant m \\ m\mu, & m<n \end{cases} \qquad (۴۰.۶)$$

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۶.۶ نشان داده شده است.
بنابراین

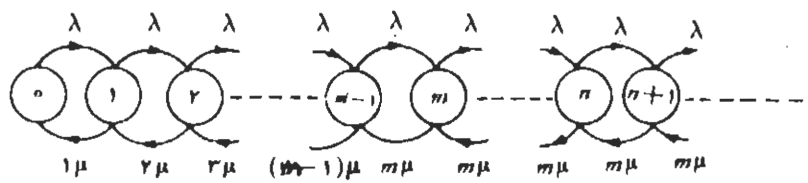
$$C_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}, & n<m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{m!}\frac{1}{m^{n-m}}, & n\geqslant m \end{cases} \qquad (۴۱.۶)$$

درنتیجه

$$\pi_0 = \left[1+\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\sum_{n=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\times\frac{1}{m^{n-m}}\right]^{-1}$$

پس ازساده‌شدن، رابطهٔ فوق به‌شکل زیرخلاصه می‌شود.

$$\pi_0 = \left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!}\frac{1}{(1-\rho)}\right]^{-1} \qquad (۴۲.۶)$$



شکل ۶.۶ نمودار آهنگ مدل $M/M/m$

که در آن $\rho = \lambda / m\mu$ است. فرض می‌شود که $\rho < 1$ باشد، درغیر این‌صورت، سیستم به حالت پایدار نمی‌رسد. برای محاسبهٔ π_n، از رابطهٔ (۱۳.۶) استفاده می‌کنیم.

$$\pi_n = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0}{n!}, & n \leq m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0 m^{m-n}}{m!}, & n \geq m \end{cases} \qquad (۴۳.۶)$$

حالتهای خاص:

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} \qquad M/M/2 \quad (۴۴.۶)$$

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+2\rho+1.5\rho^2} \qquad M/M/3 \quad (۴۵.۶)$$

محاسبهٔ L_q و W_q و L و W در مدل $M/M/m$

$$L_q = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\pi_n = \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{\pi_0}{m!}(m)^{m-n}$$

$$= \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \sum_{n=m}^{\infty}(n-m)(\rho)^{n-m}$$

یا

$$L_q = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \cdot \frac{\rho}{(1-\rho)^2} \qquad (۴۶.۶)$$

درحالت خاص $M/M/2$،

$$L_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} \qquad (۴۷.۶)$$

برای محاسبه W_q، W و L از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu}$$

$$L = \lambda W = \lambda\left(W_q + \frac{1}{\mu}\right) = L_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L = \frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\rho}{(1-\rho)^2} + \frac{\lambda}{\mu}$$

محاسبهٔ تابع توزیع مدت‌زمان انتظار در مدل $M/M/m$

در اینجا نیز T_q را مدت‌زمان انتظار مشتری در صف و T_s را مدت‌زمان انتظار مشتری در سیستم تعریف می‌کنیم. تابع توزیع T_q بر اساس قضیهٔ زیر محاسبه می‌شود. تابع توزیع T_s را نیز به‌روش مشابه می‌توان به‌دست آورد.

قضیهٔ ۲.۶

$$P[T_q = 0] = 1 - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{\pi_0}{(1-\rho)m!} \qquad (۴۸.۶)$$

$$P[T_q > t] = [1 - P(T_q = 0)]e^{-(m\mu - \lambda)t} \qquad (۴۹.۶)$$

اثبات. ابتدا $P(T_q = 0)$ را به‌دست می‌آوریم. $T_q = 0$ به‌معنای این است که‌در موقع ورود مشتری موردنظر، نه‌تنها صفی تشکیل نشده، بلکه حداقل یکی ازخدمت‌دهندگان نیز بیکار است. به‌عبارت دیگر حداکثر $m-1$ مشتری درسیستم هستند. بنابراین،

$$P(T_q = 0) = \sum_{n=0}^{m-1}\pi_n = \pi_0 \sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \qquad (۵۰.۶)$$

با استفاده از رابطهٔ (۲۲.۶) خواهیم داشت.

$$\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} = \frac{1}{\pi_0} - \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{1-\rho}$$

پس ازجایگزینی عبارت فوق دررابطهٔ (۵۰.۶)، رابطهٔ (۴۸.۶) ثابت می‌شود.

برای اثبات رابطهٔ (۴۹.۶)، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. اگر جمعیت داخل‌سیستم را N فرض کنیم، مشتری موردنظردرصورتی درصف منتظرمی‌ماند که درزمان ورود اوحداقل m مشتری درسیستم باشند. بنابراین،

$$P(T_q > t) = \sum_{n=m}^{\infty} P(T_q > t \mid N = n)\pi_n \qquad (۵۱.۶)$$

مدت‌زمان انتظاراین مشتری (به فرض اینکه n مشتری دیگر درلحظهٔ ورود او درسیستم

باشند)، برابر با مدت‌زمانی است که‌طول می‌کشد تا $(n-m+1)$ مشتری از سیستم خارج شوند، یعنی،

$$T_q = X_1 + X_2 + \cdots + X_{n-m+1}$$

که X_i عبارت از زمان بین خروج مشتریهای شمارهٔ $(i-1)$ و i است. X_i ها متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر $m\mu$ هستند، زیرا تمام خدمت‌دهندگان مشغول‌اند و آهنگ خدمت‌دهی هر کدام برابر با μ است. بدین‌ترتیب، T_q دارای تابع توزیع ارلانگی با پارامترهای $(m\mu)$ و $(n-m+1)$ است.

در نتیجه

$$P(T_q>t|N=n) = \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y}\frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\,dy$$

پس از جایگزینی رابطهٔ فوق در (۵۱.۶) نتیجه می‌شود:

$$P(T_q>t)=\sum_{n=m}^\infty \pi_n \int_t^\infty m\mu e^{-m\mu y}\frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\,dy \qquad (52.6)$$

پس از قرار دادن مقدار π_n در رابطهٔ (۲۳.۶) و تغییر محل انتگرال و مجموع، رابطهٔ (۵۲.۶) به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$P(T_q>t) = (m\mu)\frac{\pi_0}{m!}\int_t^\infty e^{-m\mu y}\sum_{n=m}^\infty\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n (m^{m-n})\frac{(m\mu y)^{n-m}}{(n-m)!}\,dy$$

$$= \frac{\mu\pi_0}{(m-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\int_t^\infty e^{-m\mu y}\sum_{n=m}^\infty\frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!}\,dy$$

اما می‌دانیم که

$$\sum_{n=m}^\infty \frac{(\lambda y)^{n-m}}{(n-m)!} = e^{\lambda y}$$

و قضیه ثابت می‌شود.

مثال ۵.۶ به‌یک تعمیرگاه یخچال، به‌طور متوسط هر دوساعت یک‌بار یک مشتری مراجعه می‌کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون ومدت‌زمان تعمیر یخچال نیز نمایی فرض می‌شود. فقط یک تعمیرکار وجود دارد.

الف. اگر به طور متوسط هر یخچال به‌مدت ۴ ساعت در تعمیرگاه بماند، تعیین‌کنید که میانگین تعداد یخچالهایی که هنوز تعمیرشان شروع نشده، چقدر است؟

ب. اگر بخواهیم مدت زمان ۴ ساعت فوق به ۲٫۵ ساعت کاهش یابد، حداقل

به‌چند تعمیرکار نیاز داریم؟

حل: مدل صف در این سیستم $M/M/1$ است. چون ورود مشتریها طبق توزیع پواسون است، لذا زمان بین دو ورود متغیر تصادفی نمایی با میانگین دوساعت یعنی $1/\lambda = 2$ و یا $\lambda = 0.5$ مشتری درهر ساعت است. هر یخچال به‌طورمتوسط ۴ ساعت در تعمیرگاه می‌ماند. یعنی، $W=4$. ازطرف دیگر

$$W=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{1}{\mu-0.5}$$

درنتیجه $\mu = 0.75$. به‌عبارت دیگر تعمیرکارمی‌تواند درهرساعت به‌طور متوسط به‌اندازهٔ ۰٫۷۵ یخچال را تعمیر کند. اگر بخواهیم میانگین تعداد یخچالهای تعمیر نشده را تعیین کنیم، باید L_q را محاسبه‌کنیم. اما می‌دانیم که

$$L_q=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{(0.5)^2}{(0.75)(0.75-0.5)}=\frac{4}{3}$$

اگر بخواهیم مدت‌زمان انتظار کاهش یابد، یعنی $W \leqslant 2.5$ شود، باید تعداد خدمت‌دهنده‌ها را افزایش بدهیم.

$$W=W_q+\frac{1}{\mu}=\frac{L_q}{\lambda}+\frac{1}{\mu}=\frac{L_q}{0.5}+\frac{1}{0.75}\leqslant 2.5$$

یا

$$L_q \leqslant \frac{7}{12}$$

از طرف دیگر، طبق رابطهٔ (۴۶.۶)،

$$L_q=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

که

$$\rho=\frac{0.5}{m(0.75)}=\frac{2}{3m}$$

و π_0 از رابطهٔ (۲۲.۶) به‌دست می‌آید.

ابتدا $m=2$ را انتخاب می‌کنیم.

$$\pi_0=\left(1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^{-1}=0.5$$

و

$$L_q=\frac{0.5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{\frac{1}{3}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{1}{12}$$

درنتیجه کلا دو تعمیرکار کافی است.

۶.۶ مدل $M/M/m/K$

در این مدل فرض می‌شود که $m \leqslant K$ باشد. درنتیجه،

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda & , n<K-1\\ 0 & , n\geqslant K\end{cases} \qquad (۵۳.۶)$$

و

$$\mu_n=\begin{cases}n\mu & , \quad n\leqslant m\\ m\mu & , \quad m\leqslant n\leqslant K\\ 0 & , \quad K<n\end{cases} \qquad (۵۴.۶)$$

بنابراین، طبق رابطهٔ (۱۲.۶) خواهیم داشت.

$$C_n=\begin{cases}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!} & , \quad n<m\\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{m!}\,\frac{1}{m^{n-m}} & , \quad m\leqslant n\leqslant K\\ 0 & , \quad K<n\end{cases} \qquad (۵۵.۶)$$

همان‌طور که قبلا درمدل $M/M/1/K$ گفتیم، آهنگ ورود مشتریان لزوماً λ نیست، زیرا تعدادی ازمشتریهایی که مراجعه می‌کنند به‌دلیل تکمیل ظرفیت، وارد سیستم نمی‌شوند. اگر آهنگ ورود مشتری را $\bar{\lambda}$ بنامیم، دراینجا نیز $\bar{\lambda}=\lambda(1-\pi_K)$ است. دراین مدل، $\rho=\bar{\lambda}/m\mu$ همواره کوچکتر ازیک است. ضمناً مقدار $\lambda/m\mu$، که می‌تواند بزرگتر ازیک باشد، را با r نشان می‌دهیم.

بااستفاده ازرابطهٔ (۱۲.۶) نتیجه می‌شود.

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}\sum_{n=m}^{K}r^{n-m}\right]^{-1} \qquad (۵۶.۶)$$

درحالت خاصی که $r=1$ باشد، رابطهٔ فوق به‌صورت زیردرمی‌آید:

$$\pi_0=\left[\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}(K-m+1)\right]^{-1} \qquad (۵۷.۶)$$

برای محاسبهٔ L_q از رابطه (۲.۵) استفاده می‌شود که درنتیجه:

$$L_q=\frac{\pi_0}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\cdot\frac{r}{(1-r)^2}\left[1-r^{K-m+1}-(1-r)(K-m+1)r^{K-m}\right] \qquad (۵۸.۶)$$

و به‌همین ترتیب،

$$L=L_q+m-\pi_0\sum_{n=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{m-n}{n!} \qquad (۵۹.۶)$$

W و W_q نیز از روابط لیتل حاصل می‌شوند.

مدل ارلانگی $(M/M/m/m)$

حال، حالت خاصی را درنظر بگیرید که $K=m$ باشد. درچنین مدلی فرض می‌کنیم که سیستم گنجایش هیچ صفی را ندارد وظرفیت سیستم منحصر به‌تعداد مشتریهایی است که می‌توانند خدمت دریافت کنند. (تعداد خدمت‌دهندگان). مثلا، دریك شبکهٔ تلفن، اگر m کانال ارتباطی باشد، درهرلحظه به‌همین تعداد هم مشتریها می‌توانند تلفن بزنند. چنانچه دریك لحظه که تمام خطوط تلفن اشغال است، یك متقاضی جدید تلفن بزند، نه‌تنها قادر به‌مکالمه نیست، بلکه حتی نوبت اوهم محفوظ نخواهد بود. درچنین حالت خاصی،

$$\pi_0=\left(\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\right)^{-1} \qquad (۶۰.۶)$$

$$\pi_m=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m\frac{1}{m!}\left[\sum_{n=0}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}\right]^{-1} \qquad (۶۱.۶)$$

رابطهٔ (۶۱.۶) به **رابطهٔ ارلانگی** موسوم است. دراین رابطه π_m معرف درصدی از زمان است که تمام خطوط تلفن اشغال هستند ومکالمهٔ جدید امکانپذیر نیست. π_m می‌تواند یکی ازمعیارهای اصلی ارزیابی سیستم تلفن باشد.

۷.۶ مدل $M/M/\infty$

دراین مدل فرض بر این است که از نظر تعداد خدمت‌دهندگان محدودیتی وجود ندارد. می‌توان چنین تصور کرد که درچنین سیستمی هر لحظه‌که یك مشتری جدید وارد شود، یك خدمت‌دهنده نیز آمادهٔ ارائهٔ خدمت می‌شود. دراین مدل به‌ازای تمام مقادیر n، $\lambda_n = \lambda$ است. برای تعیین μ_n، باید درنظر داشت که اگرچه سیستم می‌تواند بینهایت خدمت‌دهنده داشته باشد، اما اگر n مشتری درسیستم باشند، فقط n خدمت‌دهنده نیز مشغول به‌کار هستند و درنتیجه

$$\mu_n = n\mu$$

بنابراین

$$C_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}$$

به‌این‌ترتیب،

$$\pi_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!}} = e^{-\lambda/\mu} \qquad (۶۲.۶)$$

و

$$\pi_n = C_n \pi_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \cdot e^{-\lambda/\mu} \qquad (۶۳.۶)$$

میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم (L) را نیز می‌توان محاسبه کرد.

$$L = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n e^{-\lambda/\mu}\frac{1}{n!} = \frac{\lambda}{\mu}e^{-\lambda/\mu}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$$

یا

$$L = \frac{\lambda}{\mu} \qquad (۶۴.۶)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم در درازمدت متناسب با آهنگ ورود مشتری است و نسبت معکوس با آهنگ خدمت‌دهی دارد.

۸.۶ مدل $M/M/m//C$. مدل نمایی با جمعیت متناهی

دراین مدل فرض می‌کنیم تعداد مشتریهای بالقوهٔ سیستم متناهی است. به‌عبارت دیگر،

حداکثر تعداد مشتریهایی که به‌سیستم مراجعه می‌کنند، برابر با عددی متناهی، مثلاً C است. یکی ازکاربردهای این مدل، برنامه‌ریزی تعمیر ونگهداری است. اگر تعداد تعمیرکاران یك کارخانه را m وتعداد ماشینهای آن کارخانه‌که ممکن است خراب شوند را C فرض کنیم، با یك سیستم صف سروکار داریم، که می‌توان در آن ماشینها را مشتری وتعمیرکاران را خدمت‌دهنده تصور کرد. بدیهی است که دراین مورد جمعیت مشتریان متناهی و برابر با C است. این سیستم را درصورتی می‌توان یك مدل نمایی باجمعیت متناهی نامید، که هم مدت‌زمان تعمیر یك ماشین و هم مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا یك ماشین خراب شود را نمایی فرض کنیم. درهر لحظه ماشینهارا می‌توان به‌دوگروه‌تقسیم‌کرد. گروه اول، ماشینهایی که خراب‌شده‌اند یا تحت تعمیر یا منتظر تعمیر هستند. گروه دوم ماشینهایی که سالم هستند، ولی هرلحظه ممکن است خراب شوند.

مدت‌زمان سالم‌بودن هرماشین، قبل ازخراب‌شدن آن را متغیرتصادفی باتوزیع‌نمایی وپارامتر λ فرض می‌کنیم. اگر تعداد ماشینهای خراب برابر با n باشد، مجموعاً $(C-n)$ ماشین، سالم هستند، که مشتریهای بعدی سیستم محسوب می‌شوند. دراین حالت، زمان ورود اولین مشتری، در واقع زمانی است که اولین ماشین سالم خراب می‌شود. بنابراین، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا اولین ماشین خراب شود، یك متغیرتصادفی، وبرابر با حداقل $(C-n)$ متغیر تصادفی نمایی است. همان طورکه می‌دانیم، چنین متغیر تصادفی دارای توزیع نمایی با پارامتر $(C-n)\lambda$ است. بنابراین به‌ازای تمام مقادیر $n<C$ خواهیم داشت:

$$\lambda_n = (C-n)\lambda \qquad (۶۵.۶)$$

و

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & , \ n \leqslant m \\ m\mu & , \ m < n \leqslant C \\ 0 & , \ C < n \end{cases} \qquad (۶۶.۶)$$

و

$$C_n = \begin{cases} \dfrac{C!}{(C-n)!n!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \ n \leqslant m \\ \dfrac{C!}{(C-n)!m!m^{n-m}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^n & , \ m \leqslant n \leqslant C \\ 0 & , \ C < n \end{cases}$$

یا

$$C_n=\begin{cases}\binom{C}{n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n & n\leqslant m\\ \binom{C}{n}\frac{n!}{m!}\cdot m^{m-n}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, & m\leqslant n\leqslant C\end{cases}\qquad(۶۷.۶)$$

و با استفاده از رابطهٔ $\pi_0=\left[1+\sum_{n=1}^{C}C_n\right]^{-1}$، می‌توان مقدار π_0 را محاسبه کرد.

$M/M/m//C$

محاسبهٔ آهنگ ورود در مدل $M/M/n/C$

طبق آنچه گفته‌شد، در این مدل λ معرف پارامتر متغیر تصادفی نمایی مربوط به عمر یک ماشین است، که مستقل از دیگر ماشینها فرض شده است. به‌عبارت دیگر، $1/\lambda$ میانگین مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا یک مشتری مشخص وارد سیستم شود. بدین‌ترتیب، آهنگ ورود مشتری بستگی به‌تعداد مشتریهایی دارد که خارج از سیستم هستند. اگر $\bar{\lambda}$ را آهنگ ورود مشتری بنامیم، با استفاده از رابطهٔ (۶۵.۶) خواهیم داشت.

$$\bar{\lambda}=\sum_{n=0}^{C}\lambda_n\cdot\pi_n=\sum_{n=0}^{C}(C-n)\lambda\pi_n=\lambda C\sum_{n=0}^{C}\pi_n-\lambda\sum_{n=0}^{C}n\pi_n$$

در نتیجه، با استفاده از این‌خاصیت که $\sum_{n=0}^{C}\pi_n=1$ و $L=\sum_{n=0}^{C}n\pi_n$، خواهیم داشت

$$\bar{\lambda}=\lambda(C-L)\qquad(۶۸.۶)$$

به‌این ترتیب، در رابطه‌های لیتل نیز باید از $\bar{\lambda}$ به‌عنوان آهنگ ورود مشتری استفاده کرد، یعنی

$$W=\frac{L}{\bar{\lambda}}=\frac{L}{\lambda(C-L)}\qquad(۶۹.۶)$$

و

$$W_q=\frac{L_q}{\bar{\lambda}}=\frac{L_q}{\lambda(C-L)}\qquad(۷۰.۶)$$

$\bar{\lambda}$

۹.۶ مدلهای نمایی با آهنگ ورود یا آهنگ خدمت‌دهی متغیر

در اکثر مدلهای قبلی، آهنگ ورود مشتری و همچنین آهنگ خدمت‌دهی یک خدمت‌دهنده

را ثابت و مستقل از تعداد مشتریهای داخل سیستم فرض کردیم. درعمل، ممکن است آهنگ ورود مشتری یا آهنگ خدمت‌دهی، بستگی به‌طول صف داشته باشد. مثلاً، درمدل $M/M/m//C$، که قبلا مورد بررسی قرار گرفت، آهنگ ورود مشتری، λ_n، بستگی به n یعنی تعداد مشتریهای داخل سیستم داشت.

نمونه‌های متعددی وجود دارد که آهنگ ورود مشتری و یا آهنگ خدمت متأثر از طول صف خواهد بود. مثلا، سیستمی را درنظر بگیرید که در آن عمل **«امتناع»** وجود دارد؛ بدین معنا که بعضی ازمشتریها با مشاهدهٔ یک صف طولانی درسیستم، از ورود به‌آن امتناع می‌کنند. فرض کنید که λ_0 معرف آهنگ مراجعهٔ مشتریها باشد. آهنگ ورود به‌سیستم، لزوما λ_0 نیست و هرچه جمعیت مشتریهای داخل سیستم افزایش یابد، به‌تعداد کسانی که امتناع می‌کنند افزوده می‌شود.

اگر λ_n معرف آهنگ ورود مشتری به‌سیستم درلحظه‌ای باشد که تعداد مشتریهای داخل سیستم n است، رابطهٔ زیر برقرار خواهد بود.

$$\lambda_n=b_n\lambda_0\qquad(۷۱.۶)$$

که b_n پارامتری است بین صفر و یک که نسبت به n کاهنده است، یعنی

$$0\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1\leqslant 1\qquad(۷۲.۶)$$

به‌این ترتیب، درصورتی که n مشتری درسیستم باشند، فقط درصدی ازمراجعین، یعنی b_n، وارد می‌شوند. با توجه به‌شرایط سیستم، b_n می‌تواند به‌شکل $(n+1)^{-1}$، $(n^2+1)^{-1}$، $(n+1)^{-\alpha}$، که در آن α عددی مثبت است، یا $e^{-\alpha n}$ (با α مثبت) ونظایر اینها باشد.

مدل دیگری را نیز می‌توان نام برد که آهنگ ورود مشتریان به‌آن بستگی به طول صف دارد و آن حالتی است که بعضی ازمشتریها **انصراف** خود را از ایستادن درصف اعلام می‌دارند. درچنین سیستمهایی، اگرچه مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، وارد سیستم هم می‌شوند، و به صف ملحق می‌کردند، بعضی از آنها منصرف‌می‌شوند وسیستم را ترک می‌کنند. مدت‌زمانی را که یک مشتری درصف می‌ماند، قبل ازاینکه سیستم را ترک کند می‌توان متغیری تصادفی فرض کرد، که دارای توزیع‌نمایی با پارامتر γ است. چون انصراف مشتریها را مستقل ازیکدیگر فرض می‌کنیم، مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری از ادامهٔ توقف درصف منصرف شود، متغیری تصادفی و برابر با حداقل n متغیر تصادفی نمایی است. بنابراین، طبق خاصیت توزیع‌نمایی، مدت زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری منصرف شود، متغیرتصادفی نمایی با پارامتر $n\gamma$ است.

برای محاسبهٔ μ_n درسیستمهای با انصراف، فرض کنید که دریک لحظه n مشتری در سیستم باشند، تغییر حالت سیستم از n به $n-1$ به دو علت صورت می‌گیرد، یا ارائهٔ خدمت به‌یک مشتری تمام می‌شود ویا یکی ازمشتریها از ادامهٔ توقف درصف منصرف می‌گردد. بنابراین، مثلا درمدل $M/M/1$، آهنگ تغییر حالت از n به $n-1$ برابر با

$(n-1)$

$(n\gamma)+\mu$ است.

دربعضی ازسیستمها، آهنگ خدمت‌دهی نیزمی‌تواند با افزایش طول صف، افزایش یابد. مثلا، دریك‌سیستم ممکن‌است‌چندنوع آهنگ خدمت‌دهی وجود داشته‌باشد.درصورتی که تعداد مشتریهای داخل سیستم از حدی معین کمتر باشد، آهنگ خدمت‌دهی μ فرض می‌شود. با افزایش جمعیت سیستم، خدمت‌دهنده با استفاده ازابزار بهتر آهنگ خدمت‌دهی را مثلا به μ' افزایش می‌دهد. به‌همین ترتیب، باافزایش بیشترجمعیت، آهنگ خدمت‌دهی نیزمجدداً بیشتر می‌شود. دربعضی ازسیستمها تغییر آهنگ خدمت را به‌صورت زیرمی‌توان نشان داد:

$$\mu_n = \alpha_n \mu_1 \qquad (۷۳.۶)$$

که μ_1 و μ_n به‌ترتیب آهنگ خدمت به فرض وجود ۱ و n مشتری درسیستم است و α_n عددی بزرگتر ازیك فرض می‌شود. در مواردی α_n را می‌توان n^a فرض‌کردکه a عددی مثبت است.

درتمام مدلهای فوق، تعداد خدمت‌دهندگان نیزمؤثراست. مثلا، درمدل $M/M/m$، که امتناع مشتریها نیز درآن امکانپذیر است، پارامتر b_n دررابطهٔ (۷۱.۶) خیلی بیشتر از مدل $M/M/1$ است، زیرا مشتری، خارج‌قسمت تعداد مشتریهای داخل سیستم برتعداد خدمت‌دهندگان را مدنظر قرارمی‌دهد.

۱۰.۶ دورهٔ مشغول بودن وبیکاری سیستم در مدل $M/M/1$

همان‌طورکه‌درفصل پنجم گفتیم، هرسیستم‌صف به‌تناوب دوره‌های بیکاری وکار را طی‌می‌کند. براساس‌قرارداد، p_0 معرف درصدی از اوقات است که، در درازمدت، سیستم کارمی‌کند ومقدار این کمیت ازرابطهٔ (۲۴.۵) به‌دست می‌آید.

درمورد مدل $M/M/1$، درصد بیکاری سیستم π_0 و درصد مشغول بودن سیستم $\pi_0 - 1 = \rho$ است. مدت زمان بیکاری، فاصلهٔ بین زمان خالی‌شدن سیستم تا زمان ورود مشتری بعدی است. با توجه به‌خاصیت بدون حافظه‌بودن توزیع‌نمایی، مدت‌زمان بیکاری متغیری است تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر λ، و میانگین آن عبارت‌است از:

$$E(I) = \frac{1}{\lambda} \qquad (۷۴.۶)$$

با استفاده از رابطه‌های (۲۴.۵) و (۷۴.۶) وهمچنین $p_0 = 1 - \pi_0$ نتیجه می‌شود که

$$E(B) = \frac{1-\pi_0}{\pi_0} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

با استفاده ازرابطهٔ (۱۷.۶)،

$$E(B) = \frac{1}{\mu - \lambda} \qquad (۷۵.۶)$$

اگر $N(B)$ معرف تعداد مشتریانی باشدکه دریك دورهٔ مشغول بودن سیستم خدمت دریافت می‌کنند،

$$E(B) = E[N(B)] \cdot \frac{1}{\mu}$$

یا

$$E[N(B)] = \frac{\mu}{\mu - \lambda} = \frac{1}{1-\rho} \qquad (۷۶.۶)$$

۱۱.۶ دورهٔ گذرا درمدلهای نمایی

دراین قسمت تنها به‌چارچوب روابط مربوط به دورهٔ‌گذرا می‌پردازیم. قضیهٔ زیر چنین چارچوبی را ارائه می‌کند. یکی از مباحثی که درمورد دورهٔ گذرا مطرح می‌شود، چگونگی حل معادلات دیفرانسیل حاصل از قضیهٔ زیراست، که خارج ازبحث این کتاب است.

قضیه. در هرفرایند تولد و مرگ، احتمال وجود n مشتری درسیستم، درلحظهٔ t، از دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \qquad (۷۷.۶)$$

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -(\lambda_n + \mu_n)p_n(t) + \lambda_{n-1}p_{n-1}(t)\mu_{n+1}p_{n+1}(t)\,,\ n \geqslant 1 \qquad (۷۸.۶)$$

اثبات. برحسب تعریف

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_0(t+\Delta t) - p_0(t)}{\Delta t}$$

ازطرف دیگر

$$p_0(t+\Delta t) = P[N(t+\Delta t) = 0] = \sum_{i=0}^{\infty} P[N(t+\Delta t) = 0 \mid N(t) = i]\,P[N(t) = i]$$

اما طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=0|N(t)=1]$$
$$=P[(t,t+\Delta t)\ \text{یك مرگ درفاصلهٔ}\ |N(t)=i]=\mu_1\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=0|N(t)=0]$$
$$=P[\Delta t\ \text{هیچ تولد درفاصلهٔ}\ |N(t)=0]=1-\lambda_0\Delta t+o(\Delta t)$$

و به‌ازای $i \geq 2$

$$P[N(t+\Delta t)=0|N(t)=i]=P[\Delta t\ \text{تعداد}\ i\ \text{مرگ درفاصلهٔ}\ |N(t)=i]=o(\Delta t)$$

یا

$$P_0(t+\Delta t)=[1-\lambda_0\Delta t+o(\Delta t)]P_0(t)+[\mu_1\Delta t+o(\Delta t)]P_1(t)+o(\Delta t)$$

درنتیجه، این رابطه را می‌توان به‌صورت زیرنوشت که‌درحد، همان‌اولین معادلهٔ‌دیفرانسیل موردنظر است.

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t}=-\lambda_0 p_0(t)+\mu p_1(t)$$

ازطرف دیگر، به‌ازای $n \geq 1$

$$P_n(t+\Delta t)=\sum_{i=0}^{\infty}P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=i]P[N(t)=i]$$
$$=P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n-1]p_{n-1}(t)+P[N(t+\Delta t)$$
$$=n|N(t)=n]+P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n+1]p_{n+1}(t)$$
$$+\sum_{\substack{i=0\\ i\neq n-1,\, i\neq n+1}}^{\infty}P[N(t+\Delta t)=i|N(t)=i]p_n(t)$$

مجدداً طبق فرضهای ۱ و ۲ فرایند تولد و مرگ داریم:

$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n-1]=\lambda_{n-1}\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n]=1-(\lambda_n+\mu_n)\Delta t+o(\Delta t)$$
$$P[N(t+\Delta t)=n|N(t)=n+1]=\mu_{n+1}\Delta t+o(\Delta t)$$

درنتیجه می‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیـرنوشت وحد آن را به‌دست آورد، که همان

دستگاه معادلات مربوط به‌صورت مسئله است.

$$\frac{dp_n(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_n(t+\Delta t)-p_n(t)}{t}$$
$$=-(\lambda_n+\mu_n)p_n(t)+\lambda_{n-1}p_{n-1}(t)+\mu_{n+1}p_{n+1}(t)$$

حالت خاص: فرایند تولد خالص

اگر فرض کنیم، بـه‌ازای $n=1,2,3,\ldots$، $\mu_n=0$ است، یعنی فقط تولد اتفاق می‌افتد، دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیردرمی‌آید. به‌ازای تمام مقادیر n، $\lambda_n=\lambda$ فرض می‌شود.

$$\frac{dp_0(t)}{dt}=-\lambda p_0(t)$$
$$\frac{dp_n(t)}{dt}=-\lambda p_n(t)+\lambda p_{n-1}(t)$$

حل این معادلات به‌جواب زیرمنجرمی‌شود.

$$p_n(t)=P[N(t)=n]=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n-1}$$

که معرف یك فرایند پواسون است، که البته این نتیجه از قبل هم قابل پیش‌بینی بود.

محاسبهٔ رابطه‌های صف دردورهٔ پایداری با استفاده ازرابطه‌های دورهٔ گذرا

اگرسیستم به‌دورهٔ پایدار برسد، رابطهٔ $\pi_n=\lim_{t\to\infty}p_n(t)$، به‌ازای‌تمام مقادیر n وجودخواهد داشت ومقدار π_n نیزمستقل ازشرایط شروع‌کار سیستم، ثابت خواهد بود. درنتیجه،

$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_0(t)}{dt}=\frac{d\pi_0}{dt}=0$$
$$\lim_{t\to\infty}\frac{dp_n(t)}{dt}=\frac{d\pi_n}{dt}=0$$

به‌این ترتیب معادلات دیفرانسیل قضیهٔ فوق درحد به‌صورت زیر درمی‌آید.

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$

$$(\lambda_n+\mu_n)\pi_n=\lambda_{n-1}\pi_{n-1}+\mu_{n+1}\pi_{n+1}$$

این رابطه‌ها، همان روابط (۶.۶) و (۸.۶) است، که قبلاً با استفاده از معادلهٔ تعادلی به‌دست آمده بودند و رابطهٔ (۱۱.۶) نیز از آنها نتیجه‌گیری شده بود.

مسائل

۱. در تعمیرگاهی که دارای یك تعمیرکار است، ماشینها طبق فرایند پواسون برای تعمیر (به‌طور متوسط هر روز ۲ ماشین) به‌تعمیرگاه وارد می‌شوند. مدت‌زمان تعمیر نمایی با میانگین ۱/۳ روز فرض می‌شود.

الف. به‌طور متوسط هرماشین چه‌مدت در تعمیرگاه است؟

ب. احتمال اینکه دریك لحظه بیش از ۵ ماشین در تعمیرگاه باشد، چیست؟

۲. زمان بین دوورود متوالی مراجعین یك تلفن عمومی، نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه، و مدت زمان هر تلفن نیز نمایی با میانگین ۳ دقیقه است.

الف. احتمال اینکه کسی برای تلفن‌زدن مراجعه کند ومجبور شود که صبر کند، چقدر است؟

ب. به‌طور متوسط، درهرلحظه، چند نفر منتظرهستند که تلفن بزنند؟

ج. احتمال اینکه مدت زمان تلفن یکسی ازمراجعین بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

د. احتمال اینکه مدت‌زمان انتظار یکسی ازمراجعین درصف بیش از ۱۲ دقیقه طول بکشد، چقدر است؟

ه. درچه درصدی اززمان، این تلفن مشغول نیست؟

و. به‌دلایلی تعداد مراجعین اضافه شده است، به‌طوری که میانگین انتظار هر مشتری در صف به ۳ دقیقه رسیده است. به‌طورمتوسط، هرچند دقیقه‌ای یك نفر برای تلفن‌زدن مراجعه می‌کند؟

۳. دریك کارگاه، کارهای سفارشی براساس فرایند پواسون با میانگین ۲۵ قطعه درساعت می‌رسد. مدت‌زمان لازم برای ساخت هرقطعه، براساس توزیع نمایی است و به‌طورمتوسط درهرساعت ۳۰ قطعه ساخته می‌شود.

الف. احتمال اینکه دریك لحظه کارگاه فاقد کارسفارشی باشد، چقدر است؟

ب. میانگین تعداد کارهای سفارشی که منتظرهستند، چند عدد است؟

ج. احتمال اینکه یك کار بیش از ۲۰ دقیقه درصف نماند، چقدر است؟

د. احتمال اینکه دریك لحظه ۸ تا ۱۰ کار درصف منتظر بمانند، چقدر است؟

ه. اگر تعداد کارهای سفارشی ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعداد کارهای انجام نشده چه تغییری می‌کند؟

و. اگرسرعت کار ۲۰ درصد افزایش یابد، میانگین تعدادکارهای انجام‌نشده چه‌تغییری

می‌کند؟

۴. مسئلهٔ شمارهٔ ۵ فصل سوم را درنظر بگیرید. فرض می‌کنیم که دراین چاپخانه سه‌ماشین فتوکپی مشابه وجود داشته باشد. با هر ماشین می‌توان به‌طور متوسط ۱۸ جزوهٔ نوع الف یا ۶ جزوهٔ نوع ب را درساعت تکثیر کرد. سیاست چاپخانه این است که جزوه‌های نوع الف با ماشین شمارهٔ ۱ و جزوه‌های نوع ب با ماشینهای شمارهٔ ۲ و ۳ تکثیر شوند.

الف. جزوه‌های نوع الف و ب به‌طور متوسط چه‌مدت درچاپخانه می‌مانند؟

ب. احتمال اینکه تکثیر جزوهٔ نوع الف یا ب بلافاصله پس از رسیدن به‌چاپخانه انجام شود، چقدر است؟

ج. فرض کنید چنانچه تعداد جزوه‌های نوع الف در چاپخانه به سه عدد برسد، شخصی برای کمك کردن به‌مسئول ماشین فرستاده می‌شود، که‌دراین صورت می‌توان هرساعت به‌جای ۱۸ جزوه ۲۵ جزوه را به‌طور متوسط تکثیر کرد. نمودار آهنگ این مدل را رسم کنید و با استفاده از آن به سؤال بند الف مجدداً پاسخ‌دهید.

۵. دریك سیستم نمایی آهنگ ورود وخروج مشتریها به‌شرح زیراست.

$$\lambda_n=\begin{cases}\lambda\ , & n\leqslant 2\\ 2\lambda\ , & n>2\end{cases}\qquad ,\ \mu_n=10\quad ,\quad n\geqslant 1$$

احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چیست؟ تحت چه شرایطی سیستم به‌حالت پایدار می‌رسد؟ این سیستم را چگونه تفسیر می‌کنید؟

۶. درمدل $M/M/1$، احتمال اینکه مدت زمان انتظار یك مشتری درسیستم، بیش‌از مدت زمان میانگین انتظار مشتریها درسیستم باشد، چقدراست؟

۷. اتومبیلها طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۵ اتومبیل درساعت وارد یك مغازهٔ تعویض روغن می‌شوند، که فقط یك نفر درآنجا کار می‌کند. مدت زمان تعویض روغن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. به‌طور متوسط می‌توان روغن ۷ اتومبیل را درساعت تعویض کرد. فضای موجود فقط اجازهٔ توقف سه اتومبیل را می‌دهد (که شامل اتومبیلی که درحال تعویض روغن است نیزمی‌شود).

الف. به‌طور متوسط درهرلحظه چند اتومبیل دراین مغازه وجود دارد؟

ب. چند درصد صاحبان اتومبیلها به‌علت محدودیت جا ازتعویض روغن دراین مغازه منصرف می‌شوند؟

۸. مسئلهٔ شمارهٔ ۱۲ فصل سوم را درنظر بگیرید. مدت انجام هر سرویس تصادفی با میانگین [illegible]

الف. احتمال اینکه پس ازمراجعه یك مشتری، ساخت مبل او بلافاصله شروع شود، چیست؟ احتمال اینکه‌یك مشتری بیش ازهشت‌هفته معطل شود تا مبل خود را دریافت کند، چیست؟

ب. فرض کنید مدیریت کارگاه تصمیم گرفته است درهر لحظه بیش از K کار انجام نشده را قبول نکند. K را طوری محاسبه کنید که اولاً، درصد بیکاری به‌بیش از یک سوم اوقات نرسد و ثانیاً، به‌طور متوسط بیش از دو کار انجام نشده درکارگاه نباشد. با این تصمیم، کارگاه در سال (۵۲ هفته) به‌طور متوسط چندکار قبول می‌کند؟ چند درصد مشتریهای خود را ازدست می‌دهد؟

۹. اتومبیلها بر اساس فرایند پواسون وارد یک تعمیرگاه می‌شوند. متوسط زمان بین دو ورود نیم ساعت است. مدت زمان تعمیر، نمایی با میانگین ۲۲ دقیقه فرض می‌شود. اگر اتومبیلی واردشود وفضای محوطهٔ تعمیرگاه پر باشد، ازقبول این اتومبیل خودداری می‌شود. فضای محوطهٔ تعمیرگاه باید گنجایش چند اتومبیل را داشته‌باشد تا بتوان حداقل ۵۰ درصد اتومبیلهایی را که مراجعه می‌کنند قبول کرد؟

۱۰. برای تلفنهای راه دور، متقاضیان به یک شعبهٔ مخابرات، که دارای امکانات برای دو مکالمه است، مراجعه می‌کنند. در شلوغترین ساعت روز به‌طور متوسط ۱۵ تقاضای مکالمه درساعت وجوددارد و فاصلهٔ بین دونفر مراجعه‌کننده متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. مدت‌زمان هرمکالمه نیز نمایی با میانگین ۵ دقیقه است.
الف. احتمال اینکه کسی مراجعه کند و بتواند بلافاصله تلفن بزند، چقدراست؟
ب. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درصف چقدراست؟

۱۱. کارخانه‌ای دارای ۱۲ ماشین مشابه است. کارهایی که ارجاع می‌شود، برمبنای فرایند پواسون با میانگین ۱۸ کار در ساعت است. متوسط نرخ تولید به‌ازای هرماشین، ۵ کار درساعت است ومدت زمان انجام آنها نیز نمایی فرض می‌شود
الف. میانگین تعداد ماشینهای بیکار چقدر است؟
ب. تابع توزیع تعداد کارهایی که منتظر می‌مانند را به‌دست آورید.

۱۲. دریک دفتر سه‌منشی کار می‌کنند. کارهایی که به‌این منشیها ارجاع می‌شود، طبق فرایند پواسون است. درهشت ساعت‌کار این منشیها به‌طورمتوسط ۲۰ کار به‌آنها ارجاع می‌شود. مدتی که یک منشی برای هرکار باید صرف کند، دارای توزیع‌نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه است.
الف. درچه درصدی اززمان همهٔ منشیها مشغول‌اند؟
ب. درچه درصدی اززمان هرمنشی مشغول است؟
ج. اززمان ارجاع یک‌کار، تا اتمام آن به‌طورمتوسط چقدرطول می‌کشد؟

۱۳. در یک بانک، دریافت توسط یک نفر وپرداخت توسط شخص دیگری انجام می‌شود. متوسط مدت دریافت یاپرداخت مربوط به‌هرمشتری ۳ دقیقه‌است واین مدت متغیرتصادفی با توزیع نمایی فرض می‌شود. ورود مشتریها برای‌پرداخت ودریافت طبق فرایندپواسون است. به‌طور متوسط هر ساعت ۱۶ نفر برای پرداخت و ۱۲ نفر برای دریافت مراجعه

می‌کنند. مدت زمان انتظار هرمشتری چقدر است؟ اگر هردو کارمند بانک، هم کارهای دریافت وهم پرداخت را انجام‌دهند، میانگین مدت‌زمان انتظارهرمشتری چقدرخواهدشد؟

۱۴. در مرکز اطلاعات یک اداره، دونفر مأمور با کمک سه‌خط تلفن به‌سؤالات مراجعین پاسخ می‌گویند. سؤال‌کنندگان براساس فرایند پواسون تلفن می‌زنند (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۰ نفر) مدت‌زمان لازم برای پاسخ، نمایی با متوسط ۵ دقیقه فرض می‌شود. اگر هردو مأمور مشغول باشند ونفر سومی تلفن بزند، دراین صورت این شخص پشت خط‌سوم منتظر می‌ماند تا نوبت به‌او برسد. اما چنانچه‌کسی تلفن بزند وهر سه‌خط اشغال باشد، سؤال‌کننده اجباراً منصرف می‌شود (یابعداً تلفن می‌زندکه دراین‌صورت حقی برای نوبت تلفن قبلی خود نخواهد داشت)
الف. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند. نمودار آهنگ آن را رسم کنید.
ب. احتمال اینکه کسی تلفن بزند و به‌علت اشغال‌بودن هر سه‌خط منصرف شود، چیست؟
ج. احتمال اینکه‌کسی تلفن بزند وبلافاصله به‌سؤالش پاسخ داده‌شود، چیست؟
د. احتمال اینکه کسی تلفن بزند و برای دریافت پاسخ مجبور شود پشت‌خط صبر کند، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار او و دراین حالت چقدراست؟

۱۵. ورود هواپیماها به فرودگاه طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۸ هواپیما درساعت است. مدت‌زمان استفاده از باند فرودگاه برای هرهواپیما براساس توزیع‌نمایی بامیانگین ۲٫۵ دقیقه است. اگر بخواهیم به احتمال بیش از ۸۰ درصد هیچ هواپیمایی منتظرنماند چندباند موردنیازاست؟

۱۶. دریک فروشگاه‌که فقط یک صندوقدار دارد، مشتریها براساس فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. (بامیانگین ۱۰ نفر درساعت). مدت‌زمانی‌که صندوقدارصرف هرمشتری می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. اگر فقط یک نفرمشتری درصندوق باشد، میانگین این متغیرتصادفی ۲٫۵ دقیقه خواهد بود، اما چنانچه تعداد مشتری بیش از یک‌نفر باشد، یک نفر دیگر به‌صندوقدار کمک می‌کند واین زمان به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد.
الف. نمودار آهنگ این مدل را رسم کنید ومعادلات تعادلی را بنویسید.
ب. تابع توزیع تعداد مشتریها را درصندوق به‌دست آورید.
ج. میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری را درصف محاسبه کنید.

۱۷. دریک فروشگاه مراجعه مشتریها براساس فرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ساعت ۱۲ مشتری). مدت زمان خرید،نمایی با میانگین ۴ دقیقه وفروشگاه دارای یک فروشنده است.
الف. میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری درفروشگاه را به‌دست‌آورید.
ب. احتمال اینکه حداکثر سه مشتری درسیستم باشد، چیست؟
ج. حال فرض‌کنیدکه اگر تعداد مشتری درفروشگاه به‌بیش از دو (سه یا بیشتر) برسد،دو

فروشنده مشغول به‌کار می‌شوند و اگر تعداد به‌بیش از چهار برسد، به‌هر فروشنده یك‌دستیار داده می‌شود، به‌طوری که مدت زمان خدمت به ۳ دقیقه کاهش می‌یابد. نمودار آهنگ را رسم کنید.

د. در بند ج، احتمال اینکه دوفروشنده مشغول به‌کار باشند، چیست؟

ه. در بند ج، میانگین مدت‌زمان توقف هرمشتری در فروشگاه را به‌دست آورید.

۱۸. با استفاده از نتایج $M/M/m/K$، رابطهٔ π_0 را برای حالت $M/M/m$ تعیین کنید

۱۹. رابطهٔ (۷۵.۶) را مستقیماً براساس تعریف R به‌دست آورید.

۲۰. رابطه‌های (۷۲.۶)، (۷۵.۶) و (۷۶.۶) را برای $M/M/2$ نیز به‌دست آورید.

۲۱. یك‌سیستم صف با ۵ خدمت‌دهنده را در نظر بگیرید. یك‌مشتری وارد می‌شود وملاحظه می‌کند که ۱۰ نفر درصف هستند. مدت‌زمان خدمت توسط هر خدمت‌دهنده، نمایی بامیانگین ۱۰ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین مدت‌زمانی راکه طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود به‌دست آورید.

ب. میانگین مدت‌زمانی را که این مشتری درصف می‌گذراند به‌دست آورید.

ج. میانگین مدت‌زمانی راکه طول می‌کشد تااین مشتری ازسیستم خارج شود به‌دست آورید.

د. اگر بعد از ورود این مشتری از ورود مشتریهای بعدی جلوگیری به‌عمل آید، میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا سیستم خالی شود، چقدر است؟

۲۲. شرکتی می‌تواند برای انجام کارهای کامپیوتری خود، بایکی از دو مرکز «الف» یا «ب» قرارداد ببندد. هر مرکز از تعدادی عناصر مختلف تشکیل شده‌است. تعداد عناصر یك مرکز که خراب می‌شوند، طبق فرایند پواسون و با آهنگ a_1 و a_2 درهرساعت (به‌ترتیب برای مراکزالف و ب) است. تعمیر هرعنصری که خراب بشود، بلافاصله توسط یك‌تعمیرکار جداگانه آغاز می‌گردد. تعداد این تعمیرکاران درحدی است که هرگز هیچ عنصری منتظر تعمیرکار نمی‌ماند. مدت‌زمان تعمیر هرعنصر، نمایی و با میانگین b_1 و b_2 ساعت (به‌ترتیب برای مراکزالف‌وب) فرض می‌شود. چنانچه حتی یك عنصر هرمرکز خراب باشد، ادامهٔ کار متوقف می‌شود.

الف. درچند درصد اوقات، هرمرکز کار می‌کند؟

ب. چنانچه خسارت توقف هرساعت کار، C وهزینهٔ کرایه‌هرساعت مرکزالف و ب به‌ترتیب S_1 و S_2 باشد، دراین‌صورت باکدام مرکز باید قرارداد بست؟

۲۳. برای تعمیر ۱۰ ماشین، ۲ نفر تعمیرکار تعیین شده‌اند. مدت‌زمان کارکردن هرماشین، قبل از خراب‌شدن، متغیری تصادفی با توزیع نمایی ومیانگین ۵ ساعت است. میانگین مدت‌زمان تعمیر، که طبق توزیع نمایی است، ۲۰ دقیقه فرض می‌شود.

الف. میانگین تعداد ماشینهای خراب چقدر است؟

ب. میانگین مدت‌زمانی که یك ماشین منتظر تعمیرکار می‌ماند، چقدر است؟

ج. اگر این دو تعمیرکار باهم کارکنند و درآن واحد فقط یك ماشین را تعمیرکنند، مدت زمان تعمیر به ۲۰ دقیقه کاهش می‌یابد. آیا این نحوهٔ کاربهتر است؟

۲۴. سیستم صفی با یك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید. اگر مدت زمان انتظار یك مشتری درصف زیاد طول بکشد، احتمالا ازدریافت خدمت‌منصرف وازصف وسیستم خارج می‌شود. مدت‌زمانی که هرمشتری، قبل ازمنصرف‌شدن، درصف می‌گذراند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و پارامتر r است. نمودار آهنگ را دراین مدل رسم کنید. احتمال اینکه دریك لحظه سیستم خالی باشد، چقدر است؟

۲۵. دریك‌کارگاه ۳ ماشین ودو تعمیرکاروجود دارد. مدت‌زمانی که ماشین‌کارمی‌کند (قبل از خراب‌شدن) متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰ ساعت و مدت‌زمان تعمیر نیزنمایی با میانگین ۸ ساعت است. به‌طورمتوسط درهرلحظه چندماشین خراب‌است؟ درچه‌درصدی از اوقات، هردو تعمیرکار مشغول‌کار هستند؟ نمودارآهنگ این مسئله را رسم‌کنید وماتریس آهنگ‌گذار را بنویسید.

۲۶. دریك تعمیرگاه، اتومبیلها براساس فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. زمان‌بین دوورود اتومبیلها،نمایی با میانگین ۴۰ دقیقه فرض می‌شود. مدت‌زمان تعمیرنیز،نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است. اگر هراتومبیل به‌مساحتی حدود ۵ مترمربع نیازداشته باشد، تعیین‌کنید مساحت محوطهٔ پارکینگ اتومبیلها چقدر باید باشد تا با احتمال ۹۰ درصد، هراتومبیل که به تعمیرگاه مراجعه می‌کند بتواند دراین محوطه پارك‌کند ومجبور نباشد درخیابان منتظر بماند تا تعمیرش‌شروع شود.

۲۷. تعمیرکاری مسئول ۵ ماشین‌است. مدت‌زمانی که‌هرماشین بدون خراب‌شدن می‌تواند کارکند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی وبا میانگین ۲ ساعت است. مدت‌زمان تعمیر هر ماشین نیزدارای توزیع نمایی است. این تعمیرکار می‌تواند به‌طورمتوسط ۳ ماشین را در ساعت تعمیرکند.

الف. احتمال اینکه همهٔ ماشینها مشغول‌کار باشند، چقدر است؟

ب. میانگین تعداد ماشینهایی که منتظر تعمیرهستند، چقدر است؟

ج. اگر این تعمیرکار مسئولیت ۶ ماشین را قبول کند، به‌سؤالات بندهای «الف» و «ب» مجدداً پاسخ دهید.

۲۸. تنها متخصص یك تعمیرگاه ۸۰ درصد اوقات مشغول به‌کار و ۲۰ درصد اوقات به علت نبودن‌کار بیکار است. ماشینها طبق فرایند پواسون، با آهنگ روزانه ۲ ماشین برای تعمیر، می‌رسد. مدت زمان تعمیر یك ماشین نمایی فرض می‌شود. دستمزد تعمیرکار و سایر هزینه‌های تعمیرگاه روزانه ۵۰۰ تومان است. اگر ماشینی که برای تعمیر به تعمیرگاه می‌رسد، بلافاصله‌تعمیرنشود، باید با هزینهٔ ۱۰۰ آن را انبارکرد (مدت انبارشدن تأثیری

بـــر هزینه ندارد). علاوه بـــر اینها، چنانچه مدت زمان توقف ماشین درتعمیرگاه بیش از دوروز باشد، باید جریمه‌ای برابر با ۱۰۰ نیز پرداخت شود.

الف. میانگین مدت‌زمان تعمیر چند روزاست؟

ب. به‌طور متوسط روزانه چند ماشین از این تعمیرگاه خارج می‌شوند؟

ج. به‌طور متوسط هزینهٔ تعمیر هرماشین چقدراست؟

۲۹. دریك بخش تخصصی کارخانـــه‌ای چهارماشین مخصوص وجود دارد، که ادارهٔ آنها نیازبه تخصص ویژه‌دارد. متخصصین واجد شرایط که دراین‌کارخانه استخدام می‌شوند، با توجه به‌تقاضای بازار و دریافت پیشنهادهای استخدامی جدید بعد ازمدتی‌کار خود را ترك می‌کنند. مدتی کـــه یك متخصص دراین کارخانه می‌ماند، متغیری تصادفی با توزیع‌نمایی و میانگین ۲ سال است. تعداد متخصصینی کـــه برای استخدام مراجعه می‌کنند، براساس فرایند پواسون بامیانگین سالی ۵ متقاضی است. چنانچه چهارمتخصص دراستخدام‌کارخانه باشند، از استخدام جدید خودداری می‌شود.

الف. این‌مسئله را به‌صورت زنجیرهٔ مارکوف پیوسته نشان دهید و آهنگ‌گذار آن را رسم کنید.

ب. این مسئله با چه مدلی تطبیق می‌کند؟

ج. چنددرصد ازمتقاضیان استخدام نمی‌شوند؟

د. درهر لحظه، به‌طور متوسط چند ماشین به‌علت نبودن متخصص‌کار نمی‌کند؟

۳۰. ورود مشتریهای یك سیستم طبق فرایند پواسون با میانگین ۳۰ مشتری درساعت است. ۹۰ درصد مشتریهایی‌که وارد سیستم می‌شوند، چنانچه مشاهده‌کنند کـــه حداقل سه‌مشتری دیگردرصف ایستاده‌اند از واردشدن به‌سیستم منصرف می‌شوند. مدت‌زمان خدمت، متغیری تصادفی با توزیع نمایی ومیانگین ۴ دقیقه است. نمودار آهنگ را رسم و میانگین تعداد مشتریهایی راکه درصف هستند محاسبه کنید.

۳۱. مدت‌زمان معاینهٔ هـــر مریض توسط یك پزشك، نمایی است. این پزشك می‌تواند هر ساعت بـــه‌طور متوسط ۱۰ مریض را معاینه‌کند. مـــراجعهٔ بیماران طبق فرایند پواسون با میانگین ۱۲ مراجعه درساعت است، ولی درصورتی‌که ۱۰ بیمار منتظر باشند، بیش از ۸۰ درصد مراجعین منتظر نمی‌مانند و به‌سایر پزشکان مراجعه می‌کنند. نمودار آهنگ‌را رسم کنید. چند درصد اوقات این پزشك بیکاراست؟

۳۲. یك خط تولید از دوایستگاه پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات پس ازطی‌ایستگاه اول به‌انبارنیم ساختهٔ‌بین دوایستگاه وازآنجا به‌ایستگاه دوم می‌روند. ظرفیت انبار،متناهی

وبرابر با N است. مدت‌زمانی کـــه یك قطعه درایستگاههای اول ودوم می‌گذراند، دارای توزیع‌نمایی باپارامترهای به‌ترتیب μ_1 و μ_2 است. مواد اولیه ورودی ایستگاه اول به‌طور نامتناهی موجود است ومحدودیتی هم برای انبارکردن خروجی ایستگاه دوم وجود ندارد. ولی چنانچه انبار بین دوایستگاه پرشود، تولید درایستگاه اول هم متوقف می‌شود.

الف. با تعریف حالت مناسب، این مدل را به‌شکل یك زنجیرهٔ مارکوف نشان‌دهید.

ب. این مدل با کدام مدل فرایند تولد ومرگ تطبیق می‌کند؟

ج. چه‌درصدی از اوقات تولید درهرکدام ازایستگاهها متوقف می‌شود؟

۳۳. دریك مدل $M/M/1$، چنانچه λ و μ دوبرابر شونـــد (بـــه‌طور جداگانه وهمچنین به‌طور همزمان)، معیارهای ارزیابی چه تغییری می‌کند؟

۳۴. دریك مرکزآموزش کامپیوتر، دونفر مربی وپنج نفردانشجو کار می‌کنند. دانشجویان برنامه‌های خود را می‌نویسند و اگر اشکالی پیش بیاید با یکی ازمربیان مطرح می‌کنند. به‌طور متوسط مدت زمانی‌که یك دانشجوبدون برخورد با اشکالی‌کارمی‌کند، متغیرتصادفی نمایی با میانگین ۲ ساعت است. مدت زمان رفع اشکال نیز طبق توزیع‌نمایی با میانگین یك ربع ساعت فرض می‌شود.

الف. نمودار آهنگ را رسم‌کنید.

ب. احتمال اینکه دریك لحظه هردو مربی بیکار باشند، چیست؟

ج. احتمال اینکه یك دانشجو اشکال داشته‌باشد و مجبور باشد صبرکندتامربیها بیکار شوند، چیست؟ میانگین این انتظارچقدر است؟

۷

سیستمهای مارکوفی

در این فصل، سیستمهای صفی را که درچارچوب فرایند مارکوف قرار می‌گیرند، مورد بررسی قرار می‌دهیم. از آنجا که رابطه‌های فرایند مارکوف، به‌ویژه در درازمدت، نسبتاً ساده است، سعی می‌کنیم مسائل صف را حتی‌الامکان طوری فورمولبندی کنیم که بتوان از خواص مارکوفی بهره گرفت. همان طور که قبلاً گفتیم، درصورتی یک فرایند را مارکوفی می‌نامند که درهر لحظه بتوان حرکت آیندهٔ آن را تنها براساس حالت فعلی آن پیش‌بینی کرد و به‌دانستن مسیر حرکت گذشته نیازی نباشد.

فرمولبندی یک مسئلهٔ صف، معمولاً با تعریف حالت سیستم شروع می‌شود. اصولاً حالت سیستم را می‌توان به شکلهای مختلف تعریف کرد، اما همهٔ آنها لزوماً به‌سیستمهای مارکوفی منتهی نمی‌شوند. بنابراین، نکتهٔ اصلی در فورمولبندی یک مسئلهٔ صف، انتخاب مناسب حالتهای آن است. همان‌طور که قبلاً گفتیم، مدلهای فرایند تولد و مرگ حالتهای خاصی از سیستمهای مارکوفی هستند، مشروط بر اینکه تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت درنظر بگیریم. اما، چنانچه درسیستمهای دیگرهم حالت سیستم به‌همین‌ترتیب تعریف شود، لزوماً درچارچوب فرایند مارکوف قرار نمی‌گیرند؛ لذا، برحسب مورد و با درنظر گرفتن شرایط، مجموعه حالتهای مناسبی را باید تعریف کرد. چنانچه غیرازاین عمل شود، درمسئلهٔ موردنظر، خاصیت فرایند مارکوف به‌کار گرفته‌نمی‌شود. درنتیجه، بررسی تحلیلی آن معمولاً بسیار پیچیده و گاهی غیرممکن می‌شود.

همان طور که درمبحث زنجیره‌های مارکوف پیوسته گفته شد، مدت زمانی که سیستم در هرکدام ازحالتها توقف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی است. می‌توان از این خاصیت برای انتخاب مجموعهٔ حالتها استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، برای اینکه سیستمی درچارچوب فرایند مارکوف گنجانیده شود، ضرورت دارد که حالتهای آن با درنظر گرفتن خاصیت فوق تعریف شود.

بعد از اینکه مجموعه حالتهای سیستم تعریف و مشخص شد، باید احتمالات حدی سیستم را محاسبه کرد. همان طور که گفته شد، زنجیره‌های مارکوف پیوسته را معمولاً با ماتریس آهنگ گذار آن، یعنی Q، مشخص می‌کنند. آن‌گاه با استفاده از قضیهٔ حدی، احتمالات حدی یعنی π_jها را محاسبه می‌کنند. از طرف دیگر، می‌دانیم که با استفاده از نمودار آهنگ می‌توان همین نتیجه را مستقیماً به‌دست آورد. به‌عبارت دیگر، q_{ij}ها (آهنگ انتقال سیستم از i به j) را مستقیماً روی نمودار آهنگ نشان می‌دهیم. آن‌گاه، معادلات حدی را می‌نویسیم، که این‌کار دقیقاً معادل استفاده از نتایج قضیهٔ حدی است. بنابراین، در عمل معمولاً راحت‌ترین روش برای محاسبهٔ π_jها استفاده از نمودار آهنگ است.

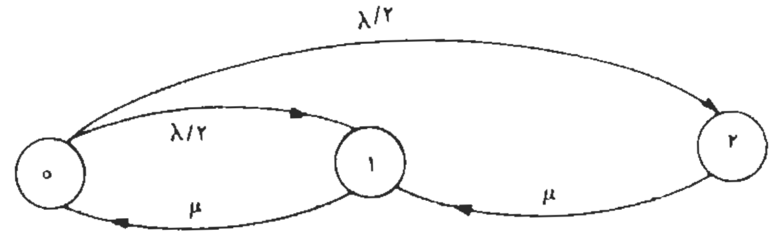
بعد از محاسبهٔ احتمالات حدی، سایر اطلاعات موردنیاز نظیر امید ریاضی طول صف، امید ریاضی زمان انتظار و نظایر اینها را می‌توان به‌دست آورد.

۱.۷ یک مثال

ماشینهایی را که دارای دوموتور هستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی می‌فرستند. پنجاه درصد ماشینهایی که به تعمیرگاه آورده می‌شوند، هردو موتورشان خراب است و ۵۰٪ بقیه فقط یک‌موتورشان نیاز به‌تعمیر دارد. فرض کنید که زمان بین دوورود متوالی ماشینها متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر λ و مدت‌زمان تعمیر هرموتور نیز نمایی با پارامتر μ است. اگر ماشینی در تعمیرگاه باشد، از قبول ماشین جدید خودداری می‌شود. احتمال اینکه ماشینی برای تعمیر به‌تعمیرگاه آورده شود، ولی به‌علت وجود ماشین دیگری درتعمیرگاه، تعمیر نشود، چقدر است؟

حل: اگر حالت سیستم را تعداد ماشینهای داخل تعمیرگاه درنظر بگیریم، مدل حاصله فرایند مارکوف نخواهد بود. برای اینکه این موضوع نشان داده شود، حالتی را درنظربگیرید که یک ماشین درتعمیرگاه باشد. مدت زمان توقف سیستم دراین حالت برابر با مدت‌زمان تعمیرماشین است، که‌این متغیر تصادفی دارای توزیع لزوماً نمایی نیست (به‌احتمال ۵۰ درصد نمایی و به احتمال ۵۰ درصد ارلانگی است). همان‌طور که قبلاً گفتیم، برای اینکه مسئله را به‌شکل فرایند مارکوف فورموله کنیم، لازم است که حالتها طوری تعریف شوند که مدت توقف سیستم درهر حالت نمایی باشد.

اکنون، حالت سیستم را تعداد موتورهای تعمیر نشده درنظر بگیرید. با این تعریف، سیستم دارای سه‌حالت صفر، یک و دو است. شکل ۱.۷ نمودار آهنگ این مدل را نشان



شکل ۱.۷ نمودار آهنگ مثال تعمیرگاه

می‌دهد. آهنگ گذار سیستم از صفر به یک برابر با آهنگ ورود یک ماشین با یک موتور خراب است (یعنی $2(\lambda/2)$). به‌همین ترتیب، آهنگ گذار از صفر به دو نیز برابر با $\lambda/2$ است. از طرف دیگر، تغییر حالت سیستم از یک بـه دو امکان‌پذیر نیست، زیرا وقتی هنوز یک موتور تعمیر نشده در تعمیرگاه باقی مانده باشد، ماشین دیگری اجازه ورود ندارد. آهنگ گذار سیستم از ۲ به ۱ و یا از ۱ به‌صفر معادل آهنگ تعمیر یک موتور، یعنی μ است.

با مشخص شدن نمودار آهنگ، می‌توان احتمالات حدی، یعنی π_j ها، را با استفاده از روابط تعادلی به‌شرح زیر محاسبه کرد.

گره ۰: $\lambda\pi_0=\mu\pi_1$

گره ۱: $\mu\pi_1=\frac{\lambda}{2}\pi_0+\mu\pi_2$

گره ۲: $\mu\pi_2=\frac{\lambda}{2}\pi_0$ و $\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$

از حل معادلات فوق، نتایج زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_2=\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda},\quad \pi_1=\frac{2\lambda}{2\mu+3\lambda},\quad \pi_0=\frac{2\mu}{2\mu+3\lambda} \qquad (۱.۷)$$

همان طور که گفته شد، می‌توانیم به‌جای استفاده از نمودار آهنگ از قضیهٔ احتمالات حدی استفاده کنیم، که در این مسئله ماتریس آهنگ گذار عبارت است از:

$$Q=\begin{bmatrix} -\lambda & \frac{\lambda}{2} & \frac{\lambda}{2} \\ \mu & -\mu & 0 \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix} \qquad (۲.۷)$$

از رابطهٔ $[\pi_0\ \pi_1\ \pi_2]Q=0$ می‌توان π_0 و π_1 و π_2 را به‌دست آورد، که با نتایج قبلی تطبیق خواهد کرد.

اکنون می‌تـوان به سؤال مـوردنظر پاسخ داد. احتمال اینکه ماشینی به تعمیرگاه مراجعه کند و از قبول آن خودداری شود، برابر است با احتمال اینکه یک ماشین در تعمیرگاه باشد؛ و به‌عبارت دیگر، برابر است با احتمال وجود یک یا دو موتور تعمیر نشده در تعمیرگاه، یعنی $\pi_1+\pi_2$.

۲.۷ مدل $M/M/1$ با ورود گروهی

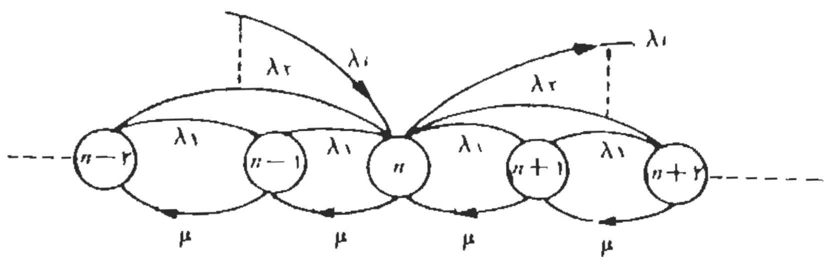
در این مـدل، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها را متغیری تصادفی بـا توزیع نمایی (و پارامتر λ) فرض می‌کنیم. لیکن، هـر بار به جای یک مشتری، گروهی مشتری وارد سیستم می‌شوند و تعداد آنها نیز متغیری تصادفی است. احتمال اینکه یک گروه مشتری از i مشتری تشکیل شده باشد را برابر با p_i فرض می‌کنیم. طبیعتاً

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i=1 \qquad (۳.۷)$$

نمودار آهنگ این مدل در شکل ۲.۷ نشان داده شده است.

طبق قضیهٔ ۳.۳، اگر تعداد پیشامدها براساس فرایند پواسون و هر پیشامد به‌احتمال p_i از نـوع خاصی باشد، تعداد پیشامدها از این نوع خاص نیز یک فرایند پواسون بـا پارامتر λp_i تشکیل می‌دهد. با توجه به‌این قضیه، تعداد گروههایی که وارد سیستم‌شوند و از i مشتری تشکیل شده باشند، فرایندی پواسون با پارامتر $\lambda_i=\lambda p_i$ خواهد بود. به این ترتیب، آهنگ ورود مشتریان برابر است با

$$\lambda=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i \qquad (۴.۷)$$



شکل ۲.۷ نمودار آهنگ مدل نمایی با ورود گروهی.

معادلات تعادلی را می‌توان با استفاده از نمودار آهنگ، شکل ۲.۷، به‌شرح زیر نوشت.

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1 \tag{۵.۷}$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\mu\pi_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\pi_{n-k}\ ,\ n=1,2,\ldots$$

پس از حل این دستگاه معادلات، π_0 را به‌شرح زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\pi_0=1-\frac{\lambda\sum_{i=1}^{\infty}ip_i}{\mu} \tag{۶.۷}$$

چنانچه متغیر تصادفی N را تعداد مشتریهای هر گروه بدانیم، میانگین آن عبارت خواهد بود از:

$$E(N)=\sum_{i=1}^{\infty}ip_i \tag{۷.۷}$$

از طرف دیگر، آهنگ ورود مشتریان عبارت از میانگین تعداد مشتریهایی است که در واحد زمان وارد سیستم می‌شوند. این کمیت برابر با میانگین تعداد گروهها ضرب در میانگین تعداد مشتریان هرگروه است. بنابراین، آهنگ ورود مشتری برابر است با

$$\lambda\sum_{i=1}^{\infty}ip_i \tag{۸.۷}$$

به‌این ترتیب، رابطهٔ (۶.۷) به‌رابطهٔ زیر تبدیل می‌شود:

$$\pi_0=1-\rho \tag{۹.۷}$$

پس از محاسبهٔ π_0، مقادیر π_n به‌ازای $n=1,2,\ldots$ از معادلات (۵.۷) بدست می‌آید.

محاسبهٔ L درمدل $M/M/1$ با ورود گروهی

پس از محاسبه π_n ها مقدار L از رابطهٔ (۱۰.۵) محاسبه می‌شود. می‌توان نشان داد مقدار L به‌شرح زیر خواهد بود.

$$L=\frac{\rho}{1-\rho}+\frac{\rho\left[\frac{E(N^2)}{E(N)}-1\right]}{2(1-\rho)} \tag{۱۰.۷}$$

که $E(N)$ میانگین تعداد مشتریهای هر گروه و $E(N^2)$ امید ریاضی مجذور آنهاست. همان‌

طور که مشاهده می‌شود، اگر در هر گروه فقط یك مشتری وجود داشته باشد، یعنی مدل $M/M/1$ برقرار باشد، رابطهٔ L نیز به‌همان رابطهٔ مربوط به $M/M/1$ تبدیل خواهد شد.

مثال ۲.۷ یك سیستم صف $M/M/1$ با ورود گروهی را در نظر بگیرید. تعداد گروههایی که وارد سیستم می‌شوند، براساس فرایند پواسون با میانگین هرساعت ۳ گروه است. تعداد مشتریهای هر گروه متغیری تصادفی با توزیع هندسی به‌شکل زیر است.

$$p_i=P[N=i]=(0.6)(0.4)^{i-1}$$

مدت زمانی که طول می‌کشد تا تنها خدمت دهنده به‌یك مشتری خدمت ارائه کند، متغیری تصادفی و نمایی با میانگین ده‌دقیقه است. احتمال اینکه دردرازمدت n مشتری در سیستم باشد، چیست؟ L را محاسبه کنید.

حل: طبق مفروضات، $\lambda=3$، $\mu=6$ و $\lambda_n=1.8(0.4)^{n-1}$ است. طبق توزیع هندسی $E(N)$ و $E(N^2)$ به‌شرح زیر محاسبه می‌شوند:

$$E[N]=\frac{1}{0.6}$$

$$E[N^2]=\mathrm{Var}[N]+E[N]^2=\frac{0.4}{0.36}+\frac{1}{0.36}=\frac{1.4}{0.36}$$

π_0 از رابطهٔ (۹.۷) به‌دست می‌آید.

$$\pi_0=1-\frac{\lambda E[N]}{\mu}=\frac{1}{6}$$

با استفاده از رابطهٔ (۵.۷) مقادیر π_n را محاسبه می‌کنیم، اگر چه فقط برای تعداد متناهی n چنین محاسباتی عملی است. برای نمونه، با در نظر گرفتن $\lambda=3$، $\lambda_1=1.8$ و $\lambda_2=0.72$ خواهیم داشت:

$$\pi_1=\frac{\lambda}{\mu}\pi_0=\frac{1}{12}$$

به‌همین ترتیب،

$$\pi_2=\frac{0.9}{12}=0.075$$

و

$$\pi_3=\frac{(0.9)^2}{12}=0.0675$$

و با استفاده از رابطهٔ (۱۰.۷)،

$$L=\frac{50}{6}.$$

حالت خاص. حال فرض کنید کـه تعداد مشتریهای هر گروه دقیقاً برابر با b است. دراین‌صورت با درنظر گرفتن اینکه $\rho=\lambda b/\mu$ است،

$$L=\frac{\rho(1+b)}{2(1-\rho)} \qquad (۱۱.۷)$$

و

$$W=\frac{1+b}{2\mu(1-\rho)} \qquad (۱۲.۷)$$

مثال ۳.۷ درقسمت کنترل کیفیت کارخانه‌ای نمونه‌های ۱۵ تایی طبق فرایندپواسون (بطور متوسط ۸ نمونه در ساعت) وارد می‌شود. مدت زمـان بررسی هر قطعه، نمایی با میانگین ۰٫۲۵ دقیقه است. تمام نمونه‌ها باید موردبررسی قرار گیرند. به‌طورمتوسط در هر لحظه چند قطعه درقسمت کنترل کیفیت بسـر می‌شود؟ مدت زمـان انتظار هرقطعه برای بررسی چقدر است؟

حل: این مسئله، یك مـدل $M/M/1$ با ورود گروهی (دقیقاً $b=15$) و همچنین $\lambda=8$ و $\mu=240$ و $\rho=\lambda b/\mu=0.5$ است. طبق رابطه‌هـای (۱۱.۷) و (۱۲.۷)، $L=8$ و (ساعت) $W=0.066$ یا (دقیقه) $W=4$ و (دقیقه)$W_q=\cancel{3.5}$ خواهد بود.
۳/۷۵

محاسبهٔ π_n با استفاده ازتبدیل z

مقدار π_n ($n=1, 2, \ldots$) را با استفاده ازتبدیل z نیزمی‌توان محاسبه کرد. (برای مطالعهٔ بیشتر در مـورد تبدیل z به‌فصل دوم بخش ۱۲ مراجعه شود). فرض کنید $P(z)$ و $K(z)$ به‌ترتیب معرف تبدیل z مقادیر π_n و p_n باشند. به‌عبارت دیگر

$$K(z)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nz^n \quad \text{و} \quad P(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\pi_nz^n \qquad (۱۳.۷)$$

دراین صورت، مقدار $P(z)$ ازرابطهٔ زیرحاصل می‌شود:

$$P(z)=\frac{\mu\pi_0(1-z)}{\mu(1-z)-\lambda z[1-K(z)]} \qquad (۱۴.۷)$$

اثبات این رابطه درمثال ۲۲.۲ ارائه شده است (با فرض $L(z)=\lambda K(z)$) با استفاده ازخواص تبدیل z و رابطهٔ $P(z)$ بـا π_0، می‌تـوان π_n را محاسبه کرد.

ضمناً، با درنظر گرفتن رابطه (۱۹.۵) می‌دانیم که

$$L=\frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1}$$

مثال ۴.۷ مثال ۲.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. دراین مدل

$$K(z)=\sum_{i=1}^{\infty}p_iz^i=\frac{0.6z}{1-0.4z} \qquad (۱۵.۷)$$

و

$$1-K(z)=\frac{1-z}{1-0.4z}$$

با درنظر گرفتن اینکه $\pi_0=1/6$ و $\rho=5/6$ و $\mu=6$ است، رابطهٔ (۱۴.۷) به‌شرح زیر ساده می‌شود:

$$P(z)=\frac{1-0.4z}{6[1-0.9z]}$$

از طرف دیگر با استفاده ازخاصیت تصاعد هندسی،

$$\sum_{n=0}^{\infty}(0.9z)^n=\frac{1}{1-0.9z}$$

بنابراین،

$$P(z)=\frac{1}{6}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(0.9z)^n-0.4\sum_{n=0}^{\infty}(0.9)^nz^{n+1}\right]$$

برای محاسبه π_n، ازرابطهٔ کلی زیراستفاده می‌شود:

$$\pi_n=\frac{1}{n!}\frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=0}=\frac{(0.9)^{n-1}}{12}$$

و

$$L=\frac{dP(z)}{dz}\Big|_{z=1}=\frac{50}{6}$$

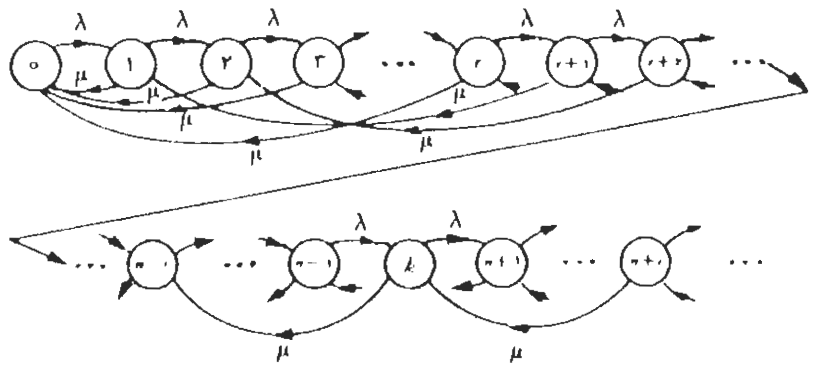
ضمناً L را می‌توان از رابطهٔ (۱۹.۵) وبـا استفاده ازمقادیر π_n، که ازرابطهٔ فوق به‌دست می‌آید، نیزمحاسبه کرد.

۳.۷ مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی

در این مدل، فرض می کنیم که هر خدمت‌دهنده، هر بار به‌جای یك مشتری به‌گروهی از مشتریها، به‌طور همزمان، خدمت ارائه می‌کند. مدت خدمت، نمایی با پارامتر μ است. ورود مشتریها براساس فرایند پواسون با آهنگ λ در نظر گرفته می‌شود. ضمناً فرض می‌کنیم که مشتریها به‌صورت انفرادی وارد سیستم می‌شوند. موقعی کــه یك خدمت دهنده بیکار می‌شود، به‌طور همزمان به‌خدمت r مشتری می‌پــردازد. چنانچه تعداد مشتریهایی کــه درصف منتظر هستند کمتر از r باشد، سیستم می‌تواند به‌دو نوع مختلف عمل کند. نوع اول این است که خدمت دهنده باهمان تعداد مشتری کار را شروع کند و منتظر نماند که تعداد مشتریها به‌حدنصاب r برسد. در نوع دوم، خدمت‌دهنده باید دقیقاً به r مشتری خدمت ارائه کند. در این صورت، سیستم منتظر می‌ماند تا تعداد مشتریهای داخل صف به r برسد.

ابتدا نوع اول را در نظر بگیریــد. تعداد مشتریهای داخل سیستم را حالت تعریف می‌کنیم. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۳.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به‌دو دلیل حالت سیستم تغییر می‌کند. یکی ورود مشتری جدید با آهنگ λ است، که در این صورت به‌تعداد مشتریها یکی اضافــه می‌شود و حالت سیستم نیز به‌همین ترتیب تغییر می‌کند. علت دیگر تغییر حالت سیستم، اتمام کار خدمت دهنده است، که در این صورت از تعداد مشتریهای داخل سیستم کاسته می‌شود. درمورد اخیر، تغییر حالت سیستم بستگی به‌حالت فعلی آن دارد. اگر حالت سیستم مساوی با یا بیشتر از r باشد، تعداد مشتریانی که خارج می‌شوند برابر با r است. امــا اگر حالت سیستم کمتر از r باشد، خدمت‌دهنده نیز به‌همین تعداد مشتری خدمت ارائه کرده است و تمام مشتریها خارج می‌شوند و حالت سیستم به‌صفر می‌رسد.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به‌شرح زیر می‌نویسیم:



شکل ۳.۷ نمودار آهنگ مدل $M/M/1$ باخدمت گروهی

$$\lambda\pi_0=\mu(\pi_1+\pi_2+\dots+\pi_r) \qquad (۱۶.۷)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}, \quad n\geq 1 \qquad (۱۷.۷)$$

(همان طور کــه نمودار آهنگ نشان می‌دهــد، در این مدل فرض شده است که اگر تعداد مشتریهایی که درحال دریافت خدمت هستند کمتر از r باشد ومشتری جدیــدی وارد شود، به‌این مشتری نیز بلافاصله وهمزمان با سایر مشتریها خدمت ارائه خواهد شد. چنانچه این فرض صدق نکند، از حالتهای ۲، ۳، ...، r لزوماً برگشت به‌صفر صورت نمی‌گیرد. فرض کنید که در لحظهٔ شروع خدمت، فقط دومشتری درصف و $r>2$ باشد. اگر در اثنای ارائه خدمت یك مشتری جدید هم وارد شود، بایــد درصف منتظر بماند، بنابراین، پس از ارائهٔ خدمت این دومشتری سیستم را ترك می‌کنند، ولی حالت سیستم به‌یك می‌رسد)

دستگاه معادلات شماره‌های (۱۶.۷) و (۱۷.۷) را می‌توان با استفاده از تبدیل z و یا **معادلهٔ مشخصه** حل کرد، روش دوم به حل معادلهٔ زیر، که به‌معادلهٔ مشخصه موسوم است، منجر می‌شود.

$$\mu x^{r+1}-(\lambda+\mu)x+\lambda=0 \qquad (۱۸.۷)$$

معادلهٔ فوق ازدرجهٔ $(r+1)$ است و می‌تــوانــد حداکثر دارای همین تعداد ریشه باشد. بدیهی است عــدد یك همواره یکی از ریشه‌هاست. از طرف دیگر، ثابت می‌کنیم که این معادله فقط دارای یك ریشه بین صفر و یك است که آن را x_0 می‌نامیم. پس ازمحاسبهٔ x_0، جواب معادلات تعادلی(۱۶.۷) و (۱۷.۷) به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$\pi_0=1-x_0 \qquad (۱۹.۷)$$

$$\pi_n=(1-x_0)x_0^n, \quad n=1,2,\dots \qquad (۲۰.۷)$$

همان طور که مشاهده می‌شود، احتمالات حدی در این مــدل مشابه معادلات حدی درمدل $M/M/1$ است؛ مگر دراین مورد که به جای ρ مقدار x_0 قرار گرفته است. لذا می‌توان نشان داد که رابطه‌های زیر نیز برقراراست:

$$L=\frac{x_0}{1-x_0} \qquad (۲۱.۷)$$

$$W=\frac{x_0}{\lambda(1-x_0)} \qquad (۲۲.۷)$$

مثال ۵.۷ دریك سیستم صف، خدمت دهنده می‌تواند به‌طور همزمان حداکثر به دو مشتری خدمت ارائه کند. ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ ۱۵ مشتری درساعت ومدت زمان خدمت نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم چقدر است؟ احتمال اینکه بیش از چهارمشتری درسیستم باشد، چقدراست؟

حل: مفروضات مسئله ~~۲~~ و ۱۵ = λ و ۱۰ = μ است. معادلهٔ مشخصه برای این مسئله، طبق رابطهٔ (۱۸.۷) عبارت است از:

$$10x^2-25x+15=0$$

این دستگاه معادله دارای سه ریشه به‌شرح زیر است

$$1\,,\quad \frac{\sqrt{7}-1}{2}\,,\quad \frac{-\sqrt{7}-1}{2}\qquad \frac{\sqrt{7}-1}{2}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، فقط یکی از ریشه‌ها، یعنی $0.823=\sqrt{7}-1/2$، عددی بین صفر و یک است، که آن را با x_0 نشان می‌دهیم. لذا

$$L=\frac{0.823}{1-0.823}=2.65$$

و احتمال اینکه بیش از چهار مشتری در سیستم باشند، برابر است با

$$\sum_{i=5}^{\infty}\pi_i=(1-x_0)\sum_{i=5}^{\infty}x_0^i=x_0^5=0.38$$

حال مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی را در نظر بگیرید، که خدمت‌دهنده فقط به r مشتری خدمت می‌دهد. در این مدل، چنانچه خدمت‌دهنده بیکار شود، اما تعداد مشتریهای داخل صف کمتر از r باشد، ارائهٔ خـدمت انجام نمی‌شود. خدمت‌دهنده منتظر می‌ماند تا مشتریهای جدیدی وارد سیستم شوند و در لحظه‌ای که r امین مشتری وارد می‌شود، کار خود را شروع می‌کند. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۴.۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، در این مدل فقط به گروههای r عددی خدمت ارائه می‌شود و تفاوت آن با مدل شکل ۳.۷ مربوط به حالتهای ۱ تا $r-1$ است.

با استفاده از نمودار آهنگ، معادلات تعادلی به‌شرح زیر نوشته می‌شود:

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_r \qquad (۲۳.۷)$$

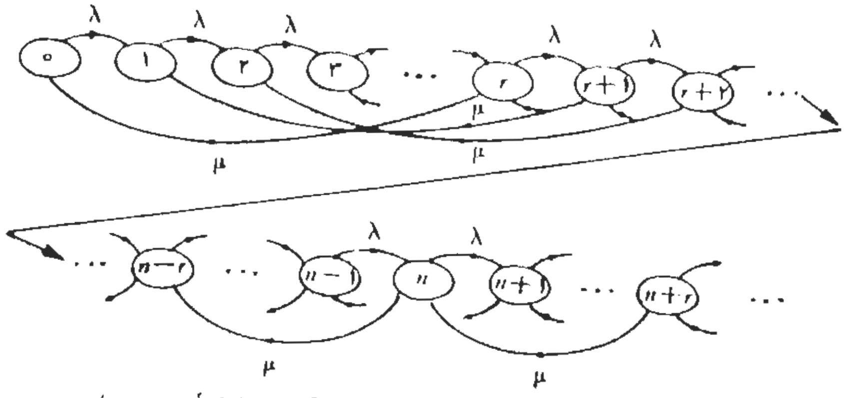
$$\lambda\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}\,,\quad 1\leqslant n<r \qquad (۲۴.۷)$$

$$(\lambda+\mu)\pi_n=\lambda\pi_{n-1}+\mu\pi_{n+r}\,,\quad r\leqslant n \qquad (۲۵.۷)$$

برای حل معادلات فوق، مجدداً معادلـهٔ مشخصهٔ (۱۸.۷) را حل می‌کنیم و x_0 را به‌دست می‌آوریم. می‌توان نشان داد که در این مدل، احتمالات حدی عبارت‌اند از:

$$\pi_0=\frac{1-x_0}{r} \qquad (۲۶.۷)$$

۸۹



شکل ۴.۷ نمودار آهنگ مدل نمایی با خدمت گروهی (دقیقاً r مشتری)

$$\pi_n=\frac{1-x_0^{n+1}}{r}\,,\quad 1\leqslant n<r \qquad (۲۷.۷)$$

$$\pi_n=\pi_0\frac{\lambda}{\mu}\cdot x_0^{n-r}\,,\quad n\geqslant r \qquad (۲۸.۷)$$

مثال ۶.۷ در مثال ۵.۷ فرض کنید که خدمت‌دهنده دقیقاً به‌دو مشتری خدمت می‌دهد؛ یعنی، صبر می‌کند تا حداقل دو مشتری در صف منتظر باشند، تا ارائهٔ خدمت را شروع کند. در این‌صورت، مسئله را مجدداً حل کنید.

حل: معادلهٔ مشخصه در این مورد نیز تفاوتی نمی‌کند. بنابراین $x_0=0.823$ و

$$\pi_0=0.089$$

از رابطهٔ (۲۷.۷)

$$\pi_1=\frac{1-x_0^2}{2}=0.16$$

به‌ازای $n\geqslant 2$ از رابطه (۲۸.۷)

$$\pi_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0\cdot x_0^{n-1}=0.1328x_0^{n-2}$$

در نتیجه

$$L=\sum_{n=1}^{\infty}n\pi_n=\pi_1+\sum_{n=2}^{\infty}n\pi_n=0.16+0.1328\sum_{n=2}^{\infty}nx_0^{n-2}$$

ازطرف دیگر، طبق رابطهٔ (۷۰.۲)

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x_{0}^{n-1} = \frac{1}{(1-x_{0})^{2}} = ۳٫۱۹$$

بنابراین،

$$L = ۰٫۱۶ + \frac{۰٫۱۳۲۸}{x_{0}}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n x_{0}^{n-1} - 1\right] = ۵٫۱۵$$

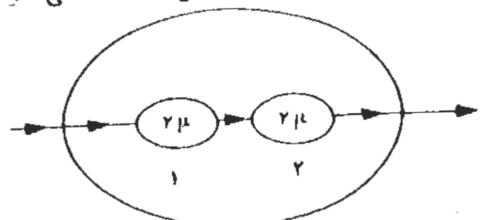
و

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_{i} = ۰٫۱۳۲۸\sum_{n=0}^{\infty} x_{0}^{n-2} = ۰٫۲۱$$

همان‌طور که مشاهده‌می‌شود، هم‌مقدار L وهم مجموع احتمالات‌افزایش یافته‌است (چرا؟).

۴.۷ مدل $M/E_r/1$

در این سیستم، مشتریها براساس فرایند پواسون بـا آهنگ λ وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت تابع توزیع ارلانگی (با r مرحله) فرض می‌شود. همان طور که درفصل سوم گفتیم، به‌علت انعطاف بسیار زیاد تابع توزیع ارلانگی، بسیاری ازمتغیرهای تصادفی را می‌توان با تقریب مناسب درقالب آن جـا داد. ازطرف دیگر، برای اینکه بتوان ازخاصیت بدون حافظه‌بـودن توزیع نمایی استفاده کرد، می‌تـوان متغیرتصادفـی ارلانگی را به‌چند متغیر تصادفی نمایی تجزیه‌کرد. فرض کنید که میانگین یك متغیرتصادفی ارلانگی $1/\mu$ وپارامتر دیگر آن $r = 2$ باشد. با استفاده ازخاصیت متغیر تصادفی‌ارلانگی، می‌توان آن رامجموع دومتغیرتصادفی نمایی فرض کرد، که میانگین هـر کدام از آنها برابر $1/2\mu$ خواهد بود. به‌عبارت دیگر، اگرمدت‌زمان خدمت براساس توزیع E_2 بامیانگین $1/\mu$ باشد، می‌توان فرض کرد که دراین سیستم، خدمت از دومرحلهٔ پشت‌سرهم تشکیل شده است، که مدت‌زمان خدمت درهرمرحله، نمایی بـا پارامتر 2μ است (شکل ۵.۷). بدین‌ترتیب، باوجود اینکه خدمت مـوردنظر عملا فقط ازیك مرحله تشکیل شده‌است، می‌تـوان فرض کرد که به‌طور



شکل ۵.۷ خدمت‌دهنده با توزیع ارلانگی دومرحله‌ای

ریاضی از دومرحلهٔ مجزا به‌وجود آمـده است. به‌عبارت دیگر، مشتری ابتدا مرحلهٔ ۱ را می‌گذراند، که‌نمایی و دارای میانگین $1/2\mu$ است. سپس وارد مرحلهٔ ۲ می‌شود ودر آنجا نیز به‌طور متوسط به‌مدت $1/2\mu$ برای دریافت خدمت می‌ماند. پس ازطی هر دومرحله، مشتری سیستم را ترك‌می‌کند. چون عملا، دومرحلهٔ خدمت قابل تفکیك نیست (فقط از نظر ریاضی به دو مـرحله تقسیم می‌شود)، لـذا در هرلحظه فقط یك مشتری دریکی از مراحل خدمت است ومرحلهٔ‌دیگر آن خالی ازمشتری است.

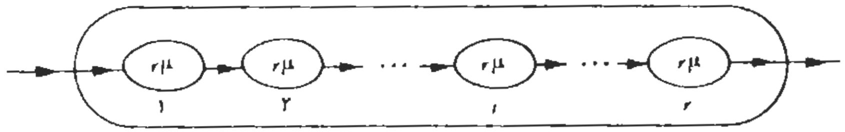
با استفاده از تعبیر فوق می‌توان ازمزایـای خاصیت مارکوفی درمحاسبات استفاده کرد. به‌عبارت دیگر، اگر مرحله‌ای که مشتری درحال گذرانیدن آن است را حالت سیستم تعریف کنیم، باتوجه به‌خاصیت بـدون حافظه‌بودن تـوزیع نمایی می‌توان فرض کرد که مشتری درست درهمین لحظه وارد این مـرحله شده است. بـه این ترتیب، تنها اطلاعات مورد نیاز این است که مشتری چند مرحله را گذرانیده است. بنابراین، با تعریف مناسب برای حالت سیستم، می‌توان مسئله را به‌یك فرایند مارکوف تبدیل کرد.

استدلال فوق درموردتجزیهٔ یك تابع توزیع ارلانگی با پارامتر r نیزصادق است. می‌توان فرض کرد که این متغیر ازمجموع r متغیر تصادفی نمایی با پارامتر $r\mu$ تشکیل شده است (شکل ۶.۷). دراینجا نیز اگر حالت سیستم را تعداد مراحل طی‌نشده توسط مشتری وهمچنین تعداد مشتریهای‌منتظر درصف تعریف کنیم،دارای یك سیستم‌مارکوفی خواهیم‌بود.

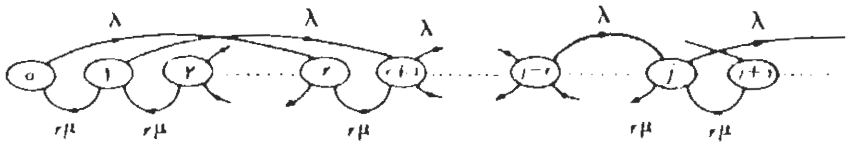
اگر سیستم دارای یك مشتری است کـه ۲ مرحلهٔ خدمت را گـذرانیده است، این مشتری باید $r-2$ مرحلهٔ دیگر را هم بگذراند؛ یعنی، حالت سیستم برابر با $r-2$ است واگر غیر ازایـن مشتری ۳ مشتری دیگـر نیز در صف باشند، حالت سیستم بـرابـر با $(r-2)+3r$ خواهد بود. به‌طور کلی، طبق تعریف فوق، اگر n مشتری درسیستم باشند ویکی از آنها m مرحله را گذرانیده باشد، حالت سیستم عبارت است از:

$$j = (n-1)r + (r-m) \quad , \quad m \leqslant r$$

با توجه بـه‌تعریف حالت سیستم، نمودار آهنگ این مـدل مطابق شکل ۷.۷ خواهد بود.



شکل ۶.۷ تجزیهٔ یك متغیر تصادفی ارلانگی r مرحله‌ای



شکل ۷.۷ نمودار آهنگ مدل $M/E_r/1$

همان‌طور که نمودار آهنگ نشان می‌دهد، به‌محض ورود یك مشتری، حالت سیستم افزایشی برابر با r پیدا می‌کند، زیرا هرمشتری جدید باید r مرحله خدمت را بگذراند. چون تعداد مراحل خدمت، حالت سیستم تعریف شده‌است؛ بنابراین، با پایان کار خدمت دهندهٔ حالت سیستم به‌اندازهٔ یك واحد کاهش می‌یابد؛ لیکن، آهنگ خدمت‌دهی، طبق آنچه گفته‌شد برابر با $r\mu$ است.

معادلات تعادل دراین مدل، براساس نمودار آهنگ، عبارت‌انداز:

$$\lambda\pi'_0 = r\mu\pi'_1 \qquad (۲۹.۷)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_j = r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \qquad (۳۰.۷)$$

$$(\lambda + r\mu)\pi'_j = \lambda\pi'_{j-r} + r\mu\pi'_{j+1} \quad , \quad j = r, r+1, \dots \qquad (۳۱.۷)$$

درمعادلات فوق، π'_j معرف احتمال وجود j مرحلهٔ خدمت انجام نشدهٔ مشتریهاست. در بررسی یك سیستم صف، آنچه بیشترمطرح است این است که چند مشتری درسیستم هستند. چنانچه π_n را احتمال وجود n مشتری درسیستم تعریف کنیم،

$$\pi_n = \sum_{j=(n-1)r+1}^{nr} \pi'_j \quad , \quad n = 1, 2, \dots \qquad (۳۲.۷)$$

چون مقادیر π'_j ازمعادلات ۳۰.۷ و ۳۱.۷ به‌دست می‌آید، می‌توان π_n را ازرابطهٔ (۳۲.۷) محاسبه کرد؛ آن‌گاه، معیارهای ارزیابی را با استفاده ازرابطهٔ (۱۷.۵) و استنتاج لیتل حساب می‌کنیم، که نتیجهٔ آنها به‌شرح زیر خواهد بود:

$$L_q = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۳.۷)$$

در رابطهٔ فوق، $\rho = \lambda/\mu$ است.

$$W_q = \frac{1+r}{2r} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۴.۷)$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \quad , \quad L = \lambda W \qquad (۳۵.۷)$$

حالتهای خاص

اگر $r = 1$ باشد، مدل فوق تبدیل بــه $M/M/1$ می‌شود و رابطه‌های فوق با روابطی که قبلاً برای این مدل به‌دست‌آوردیم تطبیق می‌کند.

اگر $r = \infty$ باشد، توزیع ارلانگی به متغیر قطعی و غیر احتمالی تبدیل می‌شود و

مدل حاصل $M/D/1$ خواهد بود. درنتیجه، بــرای این مدل معیارهای ارزیابی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید.

$$L_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (۳۶.۷)$$

$$W_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} \qquad (۳۷.۷)$$

مثال ۷.۷ مرکز اورژانس یك شهرکــوچك را درنظر بگیرید کــه فقط دارای یك آمبولانس است. تقاضا برای ارسال آمبولانس طبق فرایند پواسون به‌این مرکزمی‌رسد. میانگین زمان بین هر دوتقاضای متوالی دوساعت است. مدت‌زمانی کــه طول می‌کشد تا آمبولانس ازاین مرکز به‌محل حضور یك بیمار برسد، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و میانگین ۱۵ دقیقه است. اگر یك بیمارتلفن بزندکــه برایش آمبولانس بفرستند، احتمال اینکه آمبولانس بلافاصله فرستاده شود، چقدراست؟ میانگین مدت‌زمــان انتظاریك بیمار برای اینکه آمبولانس به‌منزلش برسد، چقدراست؟

حل: این سیستم یك مدل $M/E_2/1$ است. مدت زمــان خدمت از مجموع دومتغیر تصادفی نمایی تشکیل می‌شودکه عبارت اززمان رفت و برگشت آمبولانس است. بنابراین، مدت زمان خدمت دارای توزیع E_2 بــا میانگین ۲۵ دقیقه است. بدین‌ترتیب، $\mu = 3$ و $\lambda = 1/2$. احتمال اینکه آمبولانس بلافاصله برسد، برابر با π_0 است و

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = \frac{5}{6}$$

مدت‌زمان انتظارمشتری درصف، طبق رابطه (۳۴.۷)

$$W_q = \frac{1+2}{4} \cdot \frac{0/5}{3(3-0/5)} = \frac{1}{20} \text{ ساعت} = 3 \text{ دقیقه}$$

میانگین زمان انتظار یك مشتری تا لحظهٔ رسیدن آمبولانس عبارت ازمجموع زمان‌انتظار درصف (یعنی ۳ دقیقه) و مدت‌زمان رفتن آمبولانس ازمرکز به‌منزل او (یعنی ۱۵ دقیقه) است؛ بنابراین، باید به‌طورمتوسط ۱۳ دقیقه منتظر بماند.

مثال ۸.۷ در یك سیستم صف، ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بــا میانگین ۲۵ مشتری درساعت است. دراین سیستم، دونفرخدمت‌دهنده‌کارمی‌کنند. مدت‌زمان خدمت‌دارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۴ دقیقه است. اگر به‌جای این دوخدمت‌دهنده، یك‌ماشین خریداری شود، که‌همان خدمت را انجام دهد، مدت‌زمان خدمت چقدر باید باشد تا تعداد مشتریهای داخل سیستم [illegible] افزایش نیابد؟

حل: سیستم فعلی یك مدل $M/M/2$ و سیستم پیشنهادی یك مدل $M/D/1$ است.

L را در دو حالت باید مقایسه کرد. در هر دو سیستم $\lambda = 20$ است

مدل $M/M/2$:

در این حالت $\mu = 15$ و $\rho = 20/30 = 2/3$ است. طبق رابطهٔ (۲۲.۶)

$$\pi_0 = \frac{1-\rho}{1+\rho} = \frac{1}{5}$$

و از رابطهٔ (۲۷.۶) و استنتاج لیتل،

$$L = 2.4$$

مدل $M/D/1$

هدف تعیین μ (یا ρ) است به‌طوری که $L \leqslant 2.4$ باشد. اما در این مدل $r = \infty$ است، لذا از رابطهٔ (۳۶.۷) نتیجه می‌شود که

$$L_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{۳۸.۷}$$

و

$$L = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1-\rho} + \rho \leqslant 2.4$$

در نتیجه

$$\mu \geqslant 25 \qquad \text{یا} \qquad \rho \leqslant 0.8$$

پس مدت زمان خدمت باید کمتر از ۲٫۴ دقیقه باشد.

۵.۷ مدل $E_r/M/1$

در این مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها طبق توزیع ارلانگی (با r مرحله) و مدت زمان خدمت‌نمایی است. در اینجا نیز می‌توان فرض کرد که زمان بین دو ورود مشتریها به r مرحلهٔ نمایی تقسیم می‌شود. به‌عبارت دیگر، می‌توان تصور کرد که مشتری قبل از ورود به‌سیستم، باید r مرحلهٔ فرضی را در خارج از سیستم بگذراند. و زمان گذرانیدن اولین مرحلهٔ آن بلافاصله پس از ورود مشتری قبلی به‌سیستم شروع می‌شود. بدیهی است که عملاً

۲

چنین حالتی وجود ندارد، ولی از نظر ریاضی، گذرانیدن r مرحلهٔ فرضی با توزیع E_r تطبیق می‌کند. به‌این‌ترتیب، پس از ورود هر مشتری، با وجود اینکه هنوز از مشتری بعدی خبری نیست، می‌توان تصور کرد که اولین مرحلهٔ ورود را شروع کرده است.

تعریف حالت سیستم

تعداد مراحل ورودی که مشتریهای سیستم طی کرده‌اند را حالت می‌نامیم. هر مشتری داخل سیستم، در واقع تمام r مرحله را طی کرده است. بدین‌ترتیب، اگر مشتری آینده، که به‌طور فرضی در حال گذرانیدن مراحل ورودی است، تاکنون از m مرحله گذشته باشد و n مشتری دیگر نیز داخل سیستم باشند، حالت سیستم به‌شرح زیر بیان می‌شود:

$$j = nr + m$$

با تعریف حالت سیستم به‌شرح فوق، نمودار آهنگ این مدل را می‌توان مطابق شکل (۸.۷) نشان داد.

π'_j معرف احتمال بودن سیستم در حالت j، در درازمدت است. لذا، معادلات تعادل این مدل به‌شرح زیر است

$$r\lambda\pi'_0 = \mu\pi'_r \tag{۳۹.۷}$$

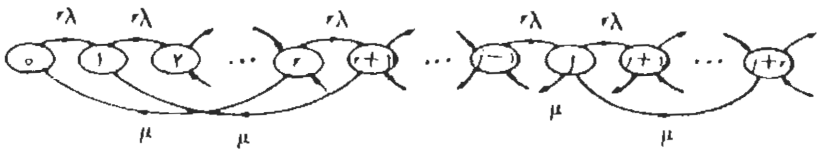
$$r\lambda\pi'_j = r\cdot\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+r}, \quad 1 \leqslant j \leqslant r-1 \tag{۴۰.۷}$$

$$(r\lambda+\mu)\pi'_j = r\lambda\pi'_{j-1} + \mu\pi'_{j+r}, \quad r \leqslant j \tag{۴۱.۷}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، ساختار این مدل با مدل $M/M/1$ (خدمت‌گردهی که دقیقاً به r مشتری خدمت می‌دهد) تطبیق می‌کند، با این تفاوت که در این مدل همه جا به‌جای λ پارامتر $r\lambda$ وجود دارد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی، در اینجا نیز از معادلهٔ مشخصهٔ سیستم، شبیه آنچه که در مدل $M/M/1$ با خدمت گروهی ارائه شد، استفاده می‌شود. در این مدل، معادلهٔ مشخصه عبارت است از:

$$\mu x^{r+1} - (r\lambda+\mu)x + r\lambda = 0 \tag{۴۲.۷}$$

در اینجا نیز، فقط یکی از ریشه‌های این معادله، که آن را x_0 می‌نامیم، عددی بین صفر و



شکل ۸.۷ نمودار آهنگ مدل $E_r/M/1$

یك است. π_n و π'_n نیز ازرابطه‌های (۲۶.۷) و (۲۷.۷) و (۲۸.۷) به‌دست می‌آیند.

ازآنجاکه دراین مدل نیز، هدف‌محاسبهٔ تابع توزیع، تعداد مشتریهای داخل‌سیستم (ونه تعداد مراحل‌کارهای انجام نشده) است، لذا π_n را احتمال بودن n مشتری در سیستم دردرازمدت تعریف می‌کنیم. رابطه π_n و π'_n به‌شرح زیراست

$$\pi_n = \sum_{j=nr}^{(n+1)r-1} \pi'_j ,\quad n = 0, 1, 2, \dots$$ (۲۳.۷)

بدین‌ترتیب، پس ازمحاسبه π'_j با استفاده ازمعادلهٔمشخصه، می‌توان π_n را نیزازرابطهٔ فوق به‌دست آورد.

$$\pi_0 = \frac{1-x_0}{r} + \frac{1-x_0^2}{r} + \dots + \frac{1-x_0^r}{r}$$ (۲۴.۷)

طبق رابطهٔ (۲۸.۷)، به‌ازای $r \leqslant j$ وبا جایگزینی $r\lambda$ به‌جای λ،

$$\pi'_j = \pi'_0 \frac{r\lambda}{\mu} x_0^{j-r}$$

درنتیجه، به‌ازای $r \leqslant n$ وبا استفاده ازرابطهٔ (۲۳.۷)،

$$\pi_n = \frac{\pi'_0 r\lambda}{\mu}[x_0^{-r} + x_0^{1-r} + \dots + x_0^{-1}](x_0^r)^n = A(x_0^r)^n$$ (۲۵.۷)

که

$$A = \frac{\pi'_0 r\lambda}{\mu}[x_0^{-r} + x_0^{1-r} + \dots + x_0^{-1}]$$ (۲۶.۷)

بنابراین، پس ازحل معادلهٔ مشخصه، π_n به‌سهولت قابل محاسبه است. برای محاسبهٔ L از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = A\frac{x_0^r}{(1-x_0^r)^2}$$ (۲۷.۷)

سایرمعیارهای ارزیابی را نیز با استفاده از رابطه‌های لیتل به‌دست می‌آوریم.

مثال ۹.۷ دریك مدل $E_2/M/1$ اگر $\lambda = 5$ و $\mu = 8$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ این مدل عبارت است از:

$$8x^3 - 18x + 10 = 0$$

تنها ریشهٔ بین صفر ویك معادلهٔ فوق عدد ۰٫۷۲۵ است؛ به‌این‌ترتیب،

$$\pi_0 = \pi'_0 + \pi'_1 = \frac{1-x_0}{2} + \frac{1-x_0^2}{2} = 0.375$$

وبرای محاسبهٔ π_n، ابتدا از رابطهٔ (۲۶.۷) مقدار A را محاسبه می‌کنیم.

$$A = \frac{1-x_0}{2} \cdot \frac{10}{8}[x_0^{-2} + x_0^{-1}] = 0.564$$

و

$$\pi_n = (0.564)(0.725^2)^n ,\quad n \geqslant 1$$

(همان‌طورکه مشاهده می‌شود، مجموع π_n برابربا یك است)

به‌همین ترتیب، ازرابطهٔ (۲۷.۷) نتیجه می‌شودکه:

$$L = \frac{0.564(0.725)^2}{[1-(0.725)^2]^2} = 1.31$$

و

$$W = \frac{L}{\lambda} = 0.263$$

و

$$L_q = L - \frac{\lambda}{\mu} = 0.692$$

و

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = 0.138$$

۶.۷ نظم اولویت

تا اینجا فرض براین بودکه نظم سیستم براساس نوبت (یا $FIFO$) است. به‌عبارت‌دیگر، هرمشتری که زودتر وارد شود، زودتر هم خدمت دریافت می‌کند. لیکن، درعمل نظمهای دیگری هم وجود دارد. در **نظم‌اولویت**، مشتریها از نظر اهمیت یکسان نیستند. اگر یك مشتری نسبت به مشتریهای دیگر اولویت داشته‌باشد، زودتر خدمت دریافت می‌دارد، حتی اگر دیرتر ازآنان وارد سیستم شده‌باشد.

از نظر کلی، دو نوع نظم اولویت وجود دارد، که عبارت‌اند از: نظم **اولویت با حق انقطاع** و **اولویت بدون حق انقطاع**. در نظم اولویت با حق انقطاع، اگر مشتری با اولویت بالاتر وارد سیستم شود و خدمت‌دهنده مشغول ارائهٔ خدمت به‌مشتری با اولویت پایینتر باشد، خدمت‌دهنده موظف است کار خود را نیمه‌تمام گذارد و به مشتری با اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم حتی مشتری‌ای که مشغول گرفتن خدمت است نیز، باید تا پایان دریافت خدمت توسط مشتری با اولویت بالاتر صبر کند. مثلاً، بیمارستان را می‌توان سیستمی با نظم اولویت و حق انقطاع تصور کرد. زیرا فرضاً، به‌بیماری‌که احتیاج به‌عمل جراحی فوری داشته باشد، خارج از نوبت رسیدگی می‌شود و حتی ممکن است پزشک، که مشغول معاینهٔ یک بیمار عادی است، نیز کارش را نیمه تمام بگذارد تا به‌این بیمار فوری بپردازد.

درنظم اولویت بدون حق انقطاع، اگر چه به‌مشتری با اولویت بالاتر زودترخدمت ارائه می‌شود، این مشتری باید صبر کند تا خدمت‌دهنده کارش را تمام کند. به‌این‌ترتیب، در این نظم موقعی که ارائهٔ خدمت به‌یک مشتری شروع شود، به‌دلیل ورود یک مشتری با اولویت بالاتر، خدمت فعلی قطع نخواهد شد.

درنظم اولویت، بین مشتریهای یک گروه، که دارای اولویت یکسان باشند، نوبت رعایت می‌شود. مطابق قرارداد، گروه ۱ دربالاترین اولویت قراردارد، و پس از آن به‌ترتیب گروههای ۲ و ۳ هستند.

باید توجه داشت که در نظم اولویت، معیارهای کلی سیستم ثابت می‌ماند. وجود اولویت، چیزی را که تغییر می‌دهد، زمان انتظار مشتریهای گروههای مختلف است. به‌عبارت دیگر، اگر بدون درنظر گرفتن اولویت، میانگین زمان انتظار هرمشتری درسیستم W باشد، با درنظر گرفتن اولویت، میانگین مدت انتظار هرمشتری بازهم W خواهد بود؛ اما، مشتری دارای اولویت بالاتر، کمتر از W ومشتری دارای اولویت پایینتر، بیشتر از W درسیستم می‌ماند. دراین قسمت، هدف تعیین مدت‌زمان انتظار مشتریهایی با اولویتهای گوناگون است.

برای بحث درمورد نتایج نظم اولویت، ازقراردادهای زیر استفاده می‌کنیم:

λ_i آهنگ ورود مشتری گروه i و $\lambda = \sum_i \lambda_i$،

W_{qi} و W_i، به‌ترتیب معرف میانگین زمان انتظارهرمشتری گروه i درصف وسیستم؛ و

L_{qi} و L_i به‌ترتیب معرف میانگین تعداد مشتریهای گروه i درصف وسیستم است.

قضیهٔ ۱.۷ یک مدل $M/M/m$ با N گروه مشتری (از نظر اولویت) و بدون حق انقطاع را درنظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به‌همهٔ گروهها یکسان (با آهنگ μ) باشد،

$$W_{qi} = \frac{1}{AB_{i-1}B_i}, \quad i = 1,\dots,N \qquad (۴۸.۷)$$

که A و B_i به‌شرح زیر تعریف می‌شوند:

$$A = (m!)(m\mu-\lambda)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^m \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j}{j!} + m\mu \qquad (۴۹.۷)$$

و

$$B_0 = 1 \qquad (۵۰.۷)$$

و

$$B_i = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{i} \lambda_j}{m\mu}, \quad i = 1,\dots,N \qquad (۵۱.۷)$$

حالت خاص. درمدل $M/M/1$ رابطهٔ (۴۸.۷) به‌شکل روابط زیرساده می‌شود:

$$W_{q1} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)} \qquad (۵۲.۷)$$

و

$$W_{qi} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_{i-1})(\mu-\lambda_1-\dots-\lambda_i)}, \quad i = 2,\dots,N \qquad (۵۳.۷)$$

پس ازمحاسبهٔ W_{qi}، سایرمعیارهای ارزیابی ازاستنتاج لیتل به‌دست می‌آید. ضمناً بدیهی است که حالت تعادل موقعی وجود دارد که $\rho = \sum\lambda_i/m\mu < 1$ باشد. اما اگر $\rho \to 1$، یعنی $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j = m\mu$ باشد، فقط میانگین مدت زمان مشتریهای گروه N (یعنی پایینترین اولویت) به‌بینهایت می‌رسد. ازطرف دیگر، همان‌طورکه مشاهده می‌شود، گروههایی با اولویت بالاتر، کمتر منتظرمی‌مانند. روش کلی اثبات این قضیه، بعداً درهمین بخش ارائه می‌شود.

مثال ۱۰.۷ تعداد دعاوی که به‌دادگاهی می‌رسد، براساس فرایندپواسون (بامیانگین ماهی ۱۰ عدد) است. تنها قاضی این دادگاه می‌تواند به‌طورمتوسط به ۱۲ پرونده درماه رسیدگی کند. مدت‌زمان رسیدگی به‌هر پرونده نیزدارای توزیع نمایی فرض می‌شود. دعاوی ازنظر این دادگاه برسه‌نوع‌اند: اضطراری، مهم و عادی، که به‌ترتیب دارای اولویتهای ۱ و ۲ و ۳ هستند و مقدارآنها به‌طورمتوسط به‌ترتیب ۱۰٪، ۲۰٪، و ۷۰٪ کل موارد دعاوی است. مدت زمانی که طول می‌کشد تا به‌یک پرونده رسیدگی شود، چقدر

است؟ تعداد پرونده‌های هر نوع از دعاوی در دادگاه چقدر است؟

حل: دراین مدل ۱۲ = μ، ۱۰ = λ، ۱ = λ_1، ۲ = λ_2، ۷ = λ_3 و ۱۲ / ۱۰ = ρ است. اگر اولویت رعایت نمی‌شد، ۱۲ / ۵ = W_q و ۵ = L بود، اما با درنظر گرفتن اولویت و با استفاده ازرابطه‌های (۵۱.۷) و (۵۲.۷) نتیجه می‌شود:

$$W_{q1} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)} = 0.075 \text{ ماه}$$

$$W_{q2} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1)(\mu-\lambda_1-\lambda_2)} = 0.1 \text{ ماه}$$

و

W_{q3}

$$W_q = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda_1-\lambda_2)(\mu-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3)} = 0.555$$

اما میانگین کل مدت انتظار مشتری درسیستم، بسا توجه به اینکه تعداد مشتریهای هر گروه یکسان نیست، ازرابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$W_q = \frac{\lambda_1}{\lambda}W_{q1} + \frac{\lambda_2}{\lambda}W_{q2} + \frac{\lambda_3}{\lambda}W_{q3} = \frac{5}{12} \qquad (۵۲.۷)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، میانگین مدت‌زمان انتظار برای کل مشتریها تغییر نمی‌کند. اما

$$L_1 = L_{q1} + \frac{\lambda_1}{\mu} = \lambda_1 W_{q1} + \frac{\lambda_1}{\mu} = 0.16$$

و

$$L_2 = 0.368 \qquad L_3 = 2.272$$

و

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = 5$$

که دراین مورد نیز میانگین کل تعداد مشتریهای داخل سیستم تغییر نمی‌کند.

مثال ۱۱.۷ مثال ۱۰.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. اگر تعداد قاضی از یك نفر به‌دو نفر افزایش یابد، میانگین مدت‌زمان انتظار مشتریها چگونه تغییر خواهدکرد؟

حل: اگر در نظم اولویت، اولویت رعایت نشود، مدل حاصل یك مدل $M/M/2$ خواهد بود. دراین‌صورت،

$$\pi_0 = \frac{14}{32} \quad \text{و} \quad \rho = \frac{10}{22}$$

و طبق رابطهٔ (۴۸.۶)

$$L_q = 0.175$$

و

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = 0.0175$$

اما براساس نظام اولویت، طبق روابط (۴۹.۷) و (۵۰.۷) و (۵۱.۷) داریم:

$$A = 9782$$

$$B_0 = 1, \qquad B_1 = 0.958, \qquad B_2 = 0.875, \qquad B_3 = 0.583$$

درنتیجه، از رابطهٔ (۲۸.۷)

$$W_{q1} = 0.0106$$

$$W_{q2} = 0.0122$$

$$W_{q3} = 0.02$$

ومیانگین زمان انتظارکل مشتریها عبارت است از:

$$W_q = 0.0175$$

که با نتیجهٔ حاصل ازمدل، بدون درنظرگرفتن نظم اولویت، تطبیق می‌کند.

درسیستمی که‌در آن نظم اولویت رعایت می‌شود، ممکن است نوع خدمت موردنیاز مشتریهای گروههای مختلف نیزیکسان نباشد. فرض کنید μ_i معرف میانگین تعدادمشتریهای نوع i است،که توسط یك خدمت دهنده، در زمان واحد خدمت دریافت می‌دارند. دراین صورت، نتایج یك نظم اولویت طبق قضیهٔ زیر بیان می‌شود.

قضیهٔ ۲۰۷ یك مدل $M/M/1$ بسا N گروه مشتری (از نظر اولویت) وبدون حق انقطاع را درنظربگیرید. اگر آهنگ خدمت‌دهی به‌مشتریهای گروه i برابر با μ_i باشد،

$$W_{qi} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{\lambda_i}{\mu_i^2}}{\left[1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}\right]\left[1 - \frac{\lambda_1}{\mu_1} - \dots - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right]} \qquad (۵۵.۷)$$

(که $\lambda_0 = 0$ است)

(همان طور که مشاهده می‌شود، اگر $\mu_3 = \mu_2 = \mu_1 = \mu$ باشد، رابطهٔ فوق به روابط (۵۲.۷) و (۵۳.۷) تبدیل خواهد شد). روش کلی اثبات این قضیه بعداً ارائه می‌شود.

مثال ۱۲.۷ مثال ۱۰.۷ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که نوع خدمت گروههای مختلف با یکدیگر متفاوت باشد ($\mu_1 = 15$، $\mu_2 = 12$، $\mu_3 = 11$ است) دراین صورت میانگین مدت زمان انتظار هر گروه مشتری در صف را محاسبه کنید.

حل: ابتدا صورت کسر W_q را محاسبه می‌کنیم.

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\lambda_i}{\mu_i^2} = \frac{1}{225} + \frac{2}{144} + \frac{7}{121} = 0.0762$$

درنتیجه،

$$W_{q_1} = \frac{0.0762}{1 - \frac{1}{15}} = 0.0816$$

$$W_{q_2} = \frac{0.0762}{\left(1 - \frac{1}{15}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)} = 0.1065$$

$$W_{q_3} = \frac{0.0762}{\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12}\right)\left(1 - \frac{1}{15} - \frac{2}{12} - \frac{7}{11}\right)} = 0.7626$$

نظم اولویت با حق انقطاع

همان طور که گفتیم، دراین نظم تا زمانی که مشتریهای دارای اولویت بالاتر درسیستم هستند، از ارائهٔ خدمت به مشتریهای دارای اولویت پایینتر خودداری می‌شود. درچنین سیستمی، حتی اگرموقع ورود مشتری دارای اولویت بالاتر، خدمت‌دهنده درحال خدمت‌دهی به مشتری دارای اولویت پایینتر باشد، موظف است که کار خود را قطع کند و بلافاصله به مشتری دارای اولویت بالاتر خدمت ارائه کند. ادامهٔ خدمت قطع‌شده موقعی شروع می‌شود که دیگر مشتری دارای اولویت بالاتر درسیستم نباشد. بدین‌ترتیب، ارائهٔ خدمت به یک مشتری ممکن است چندبار قطع شود.

درنظم اولویت باحق انقطاع، می‌توان تصور کرد که سیستم برای خدمت به مشتریهای اولویت اول ایجاد شده است و فقط درمواقع بیکاری به مشتریهای گروههای بعدی خدمت داده می‌شود. به همین ترتیب، وجود مشتریهایی با اولویت شمارهٔ ۳ و ۴ و ... بر کار

مشتریهای دارای اولویت ۱ و ۲ هیچ اثری نخواهد داشت.

قضیهٔ ۳.۷ یک مدل $M/M/1$ با N گروه مشتری (ازنظر اولویت) و حق انقطاع را درنظر بگیرید. اگر نوع خدمت ارائه شده به همهٔ گروهها یکسان باشد،

$$W_1 = \frac{1}{\mu - \lambda_1} \qquad (۵۶.۷)$$

$$W_i = \frac{\mu}{(\mu - \lambda_1 - \cdots - \lambda_{i-1})(\mu - \lambda_1 - \cdots - \lambda_i)} \quad i = 2, \ldots, N \qquad (۵۷.۷)$$

اثبات. رابطهٔ (۵۶.۷) واضح است. زیرا دراین سیستم می‌توان تصور کرد که ارائهٔ خدمت فقط برای گروه ۱ است، مگر در وقت بیکاری که به سایر گروهها هم خدمت ارائه می‌شود. دراین صورت برای گروه ۱، یک مدل $M/M/1$ خواهیم داشت.

حال گروه ۱ و ۲ را با هم درنظر بگیریم. وجود گروههای دیگر هیچ تأثیری بر این دو گروه ندارد، لذا اگر میانگین مدت زمان انتظارمجموع مشتریهای ۱ و ۲ را با $W_{1,2}$ نشان دهیم، می‌توان با استفاده از مدل $M/M/1$ این مقدار را محاسبه کرد. لیکن باید درنظرداشت که آهنگ ورود مجموع مشتریهای ۱ و ۲ برابر با $\lambda_1 + \lambda_2$ است. لذا، طبق رابطهٔ (۲۱.۶)

$$W_{1,2} = \frac{1}{\mu - \lambda_1 - \lambda_2}$$

اما

$$W_{1,2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} W_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} W_2$$

با دانستن W_1 و $W_{1,2}$ می‌توان W_2 را محاسبه کرد. به‌همین ترتیب W_3 و ... به‌دست می‌آید ورابطهٔ (۵۷.۷) حاصل می‌شود.

مثال ۱۳.۷ مثال ۱۰.۷ را با فرض حق انقطاع مجدداً درنظر بگیرید. دراین صورت

$$W_1 = \frac{1}{12 - 1} = \frac{1}{11}$$

$$W_2 = \frac{12}{(12-1)(12-1-2)} = \frac{4}{33}$$

$$W_3 = \frac{12}{(12-1-2)(12-1-2-7)} = \frac{2}{3}$$

۹۶

ومیانگین مدت‌زمان انتظار کل مشتریها برابر است با:

$$W=\frac{\lambda_1}{\lambda}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda}W_2+\frac{\lambda_3}{\lambda}W_3=\frac{1}{2}$$

می‌دانیم که بدون درنظر گرفتن اولویت نیزهمین نتیجه برای کل سیستم به‌دست می‌آید. ضمنا W_{q1} و W_{q2} و W_{q3} را با استفاده از استنتاج لیتل می‌توان محاسبه کرد، که عبارت‌اند از: ۰٫۰۰۷۵، ۰٫۰۳۸ و ۰٫۵۸. همان طور که‌مشاهده می‌شود، دراین حالت مدت‌زمان انتظار مشتریهای گروه ۱ و ۲ نسبت به نظم اولویت بدون حق انقطاع کمتر و درمورد مشتریهای گروه ۳ نسبت به این نظم بیشتر شده‌است. به‌عبارت دیگر، اگرچه زمان انتظار درکل سیستم تغییرنمی‌کند، نظم اولویت باحق انقطاع به‌نفع گروههای ۱ و ۲ و به‌زیان گروه ۳ تمام شده است.

حال همین مثال را برای $M/M/2$ درنظر بگیرید (که به‌جای یك قاضی دوقاضی در دادگاه کار کنند). همان طور که گفته شد، وجود گروههای ۲ و ۳ اثری بر گروه ۱ ندارد. و می‌توان تصور کرد که سیستم فقط به‌این گروه خدمت می‌دهد. لذا، درمورد گروه ۱، مدل $M/M/2$ با $\lambda=1$ و $\mu=12$ را خواهیم داشت. به این ترتیب W_{q1} محاسبه می‌شود. حال مجموع گروههای ۱ و ۲ را درنظر بگیرید. دراین‌حالت، می‌توان تصور کرد که گروه ۳ نقشی ندارد. لذا، $W_{q1,2}$ ازمدل $M/M/2$ با آهنگ ورود $\lambda_1+\lambda_2$ محاسبه می‌شود وپس از آن W_{q2} ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$W_{q1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_{q1}+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_{q2}$$

و به‌همین ترتیب W_{q3} محاسبه خواهد شد.

اگر فقط گروه یك درنظر گرفته شود، با استفاده ازمدل $M/M/2$ وبا $\lambda=1$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود:

$$W_1=0.0835$$

اگر فقط گروههای یك و دو درنظر گرفته شود، با استفاده از مدل $M/M/2$ و با $\lambda=\lambda_1+\lambda_2=3$ و $\mu=12$ نتیجه می‌شود

$$W_{1,2}=0.0846$$

باتوجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}W_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}W_2$$

نتیجه می‌شود:

$$W_2=0.08515$$

به‌همین ترتیب، اگرتمام گروهها درنظر گرفته شود،

$$W_{1,2,3}=0.1008$$

وبا توجه به‌رابطهٔ

$$W_{1,2,3}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\lambda_i W_i}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

نتیجه می‌شود:

$$W_3=0.1075$$

اثبات قضیهٔ ۱.۷ اثبات این قضیه را فقط درساده‌ترین حالت آن درنظرمی‌گیریم، که مشتریها ازنظراولویت فقط به دوگروه تقسیم می‌شوند.

برای اینکه بتوانیم مسئله را درچارچوب یك فرایند مارکوف فورموله کنیم، حالت سیستم را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم.

حالت سیستم با سه حرف (mnr) مشخص می‌گردد، که m معرف تعداد مشتریهای نوع ۱ (با اولویت بالاتر) در سیستم، n تعداد مشتریهای نوع ۲ (با اولویت پایینتر) در سیستم و r نشاندهندهٔ شمارهٔ اولویت‌مشتری‌است، که درحال خدمت گرفتن‌است. مثلاً، حالت (۱۰و۸و۲) به‌معنای این است که ۱۰ مشتری بااولویت ۱ و۸ مشتری بااولویت ۲ درسیستم هستند وضمناً یکی ازمشتریهای با اولویت ۲ در حال گرفتن خدمت است. بنابراین، ۱۰ مشتری‌نوع ۱ و۷ مشتری‌نوع ۲ درصف‌هستند. استثنائاً حالت‌صفر را بایك عددنشان‌می‌دهیم.

نمودار آهنگ این مدل درشکل ۹.۷ نشان داده شده است. براساس این نمودار آهنگ، معادلات تعادلی را به‌شرح زیرمی‌نویسیم:

$$\begin{cases}\lambda\pi_0=\mu(\pi_{1,0,1}+\pi_{0,1,2}) & \\ (\lambda+\mu)\pi_{1,0,1}=\lambda_1\pi_0+\mu(\pi_{2,0,1}+\pi_{1,1,2}) & \\ (\lambda+\mu)\pi_{0,1,2}=\lambda_2\pi_0+\mu(\pi_{1,1,1}+\pi_{0,2,2}) & \\ (\lambda+\mu)\pi_{m,0,1}=\lambda_1\pi_{m-1,0,1}+\mu(\pi_{m+1,0,1}+\pi_{m,1,2}) & ,\quad m>1\\ (\lambda+\mu)\pi_{0,n,2}=\lambda_2\pi_{0,n-1,2}+\mu(\pi_{1,n,1}+\pi_{0,n+1,2}) & ,\quad n>1\\ (\lambda+\mu)\pi_{1,n,1}=\lambda_2\pi_{1,n-1,1}+\mu(\pi_{2,n,1}+\pi_{1,n+1,2}) & ,\quad n>1\\ (\lambda+\mu)\pi_{m,n,2}=\lambda_1\pi_{m-1,1,2} & ,\quad m>1\\ (\lambda+\mu)\pi_{m,n,1}=\lambda_1\pi_{m-1,n,1}+\lambda_2\pi_{m,n-1,1}+\mu(\pi_{m+1,n,1}+\pi_{m,n+1,2}) & \\ & ,\quad m>1,\ n>0\end{cases}$$

$\lambda_1 \Pi_{m-1,n,2}$

$$(\lambda+\mu)\pi_{mn2}=\lambda_1\pi_{m-1,n,2}+\lambda_2\pi_{m,n-1,2}\quad,\quad m\geqslant 0,\ n\geqslant 1 \qquad (۵۸.۷)$$

ازطرف دیگر، احتمال بودن n مشتری درسیستم ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید.

$$\pi_n=\sum_{m=0}^{n-1}(\pi_{n-m,m,1}+\pi_{m,n-m,2}) \qquad (۵۹.۷)$$

باتوجه به‌اینکه احتمال بودن n مشتری درسیستم (صرف‌نظر از وابستگی به‌نوع اولویت آنها) بستگی به‌ضابطهٔ انتخاب‌مشتری ندارد، مقداراین‌احتمال برابر π_n درمدل $M/M/1$ است، یعنی

$$\pi_n=(1-\rho)\rho^n \qquad (۶۰.۷)$$

به‌همین ترتیب، درصد مشغول بودن سیستم، صرف‌نظر از اینکه خدمت‌دهنده به‌کدام گروه خدمت می‌دهد، برابر با ρ است. از طرفی، درصدی از زمان‌که خدمت‌دهنده به مشتریهای نوع ۱ و ۲ خدمت می‌دهد، متناسب با تعداد مشتریهای نوع ۱ و ۲، یعنی λ_1 و λ_2 است، بنابراین

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\rho=\frac{\lambda_1}{\mu} \qquad (۶۱.۷)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\pi_{mn2}=\frac{\lambda_2}{\mu} \qquad (۶۲.۷)$$

بااستفاده ازمعادلات تعادلی‌وروابط (۵۹.۷) تا (۶۲.۷) می‌توان نتایج کلی زیررا به‌دست آورد، که حالت خاص رابطه‌های (۵۲.۷) و (۵۳.۷) هستند.

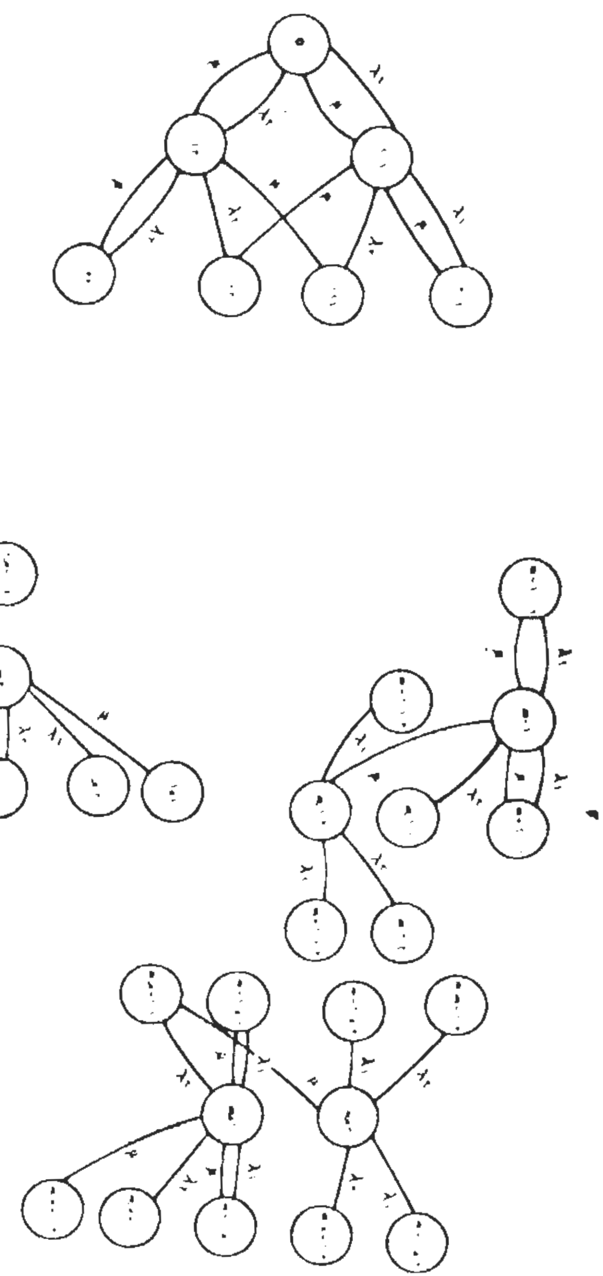
$$L_1=\frac{(\lambda_1/\mu)(1+\rho-\lambda_1/\mu)}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$L_{q1}=\frac{\rho\lambda_1/\mu}{1-\lambda_1/\mu}$$

$$W_{q1}=\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda_1)}$$

$$L_2=\frac{(\lambda_2/\mu)(1-\lambda_1/\mu+\rho\lambda_1/\mu)}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$

$$L_{q2}=\frac{\rho\lambda_2/\mu}{(1-\rho)(1-\lambda_1/\mu)}$$



شکل ۹.۷ نمودار آهنگ صف M/M/1 با دو گروه اولویت

$$W_{q_2} = \frac{\lambda}{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda_1)}$$

۷.۷ شبکه‌های صف

در سیستمهای صفی که در بخشهای قبل مورد بررسی قرار گرفتند، خدمت از یك مرحله تشکیل شده بود. به عبارت دیگر، در چنین سیستمهایی فقط یك نوع خدمت ارائه می‌شود و همهٔ مشتریها برای دریافت آن مراجعه می‌کنند. درعمل، سیستمهایی دیگر هم وجود دارند که در آنها چند نوع خدمت عرضه می‌شود و هر مشتری برای دریافت تعدادی از آنها (و نه لزوماً همهٔ آنها) مراجعه می‌کند. درواقع، این سیستمها را می‌توان مجموعهٔ چند سیستم فرعی فرض کرد، که هر کدام از آنها با داشتن تعدادی خدمت‌دهنده، مستقلاً خدمت مشخصی را ارائه می‌دهند، ولی از نظر ورود مشتری، به‌یکدیگر وابسته هستند. در این سیستمها، مجموعهٔ خدمت دهندگانی که یك نوع خدمت عرضه می‌کنند، را ایستگاه خدمت می‌نامند.

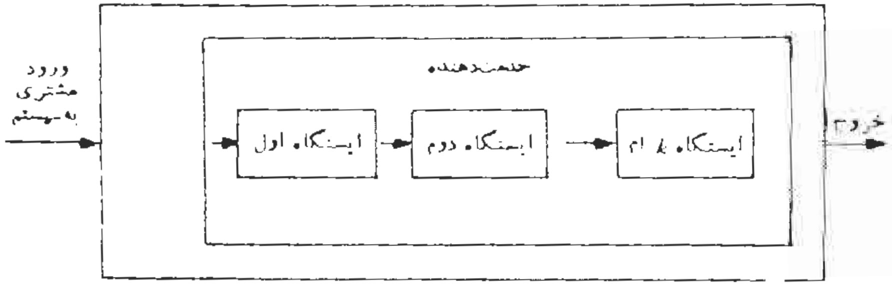
برای نمونه، تعمیرگاه اتومبیلی را در نظر بگیرید که در آن تعمیرکاران مختلف مشغول به کار هستند. در این تعمیرگاه، هر گروه تعمیرکار را، که وظیفه مشخصی (مثلاً صافکاری، میزان فرمان، تنظیم موتور و...) را انجام می‌دهد، یك ایستگاه خدمت می‌گویند. در هر ایستگاه خدمت، یك یا چند خدمت‌دهنده (تعمیرکار) به‌طور موازی کار می‌کنند. یك مشتری (اتومبیل) ممکن است فقط به‌یك نوع تعمیر (ایستگاه خدمت) نیاز داشته باشد، ولی اتومبیلهایی هم به‌چند قسمت تعمیرگاه مراجعه می‌کنند. این اتومبیلها پس از دریافت خدمت از یك تعمیرکار، از خدمت تعمیرکاران نوع دیگر هم استفاده می‌کنند. در این تعمیرگاه، اگر چه هر گروه تعمیرکار (ایستگاه خدمت) از نظر ارائهٔ خدمت مستقل است، اما با توجه به‌اینکه مراجعین آنها ممکن است خروجیهای سایر ایستگاههای خدمت باشند، لذا نمی‌توان هر ایستگاه خدمت را یك سیستم صف مستقل و جدا از سایر ایستگاهها تلقی کرد.

در این بخش، حالت خاصی از شبکه‌های صف مورد بررسی قرار می‌گیرد، که ورود مشتریها به آن طبق فرایند پواسون و مدت‌زمان دریافت هر نوع خدمت، نمایی است.

شبکه‌های سری

در این سیستمها، تعدادی ایستگاه خدمت به‌طور سری قرار گرفته‌اند. هر مشتری ابتدا به‌ایستگاه شمارهٔ یك مراجعه و پس از دریافت خدمت به‌ایستگاه دوم و به‌همین ترتیب به‌سایر ایستگاهها مراجعه می‌کند. همان‌طور که در شکل ۱۰.۷ مشاهده می‌شود خدمت‌دهنده، در واقع مجموع ایستگاههای خدمت است. ورود مشتریها به سیستم طبق فرایند پواسون با پارامتر λ و مدت‌زمان خدمت در هر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. در ایستگاه شماره i، (به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, K$)، تعداد خدمت‌دهنده m_i و میانگین مدت‌زمان خدمت $1/\mu_i$ است. در یك سیستم سری، همهٔ مشتریها متقاضی هر K نوع خدمت هستند و ضمناً ترتیب

٤٩



شکل ۱۰.۷ یك سیستم صف با خدمت‌دهنده‌های سری

دریافت خدمت نیز برای همه یکسان است. به‌این ترتیب، مشتری پس از ورود به‌سیستم در صف ایستگاه اولی منتظر می‌ماند. پس از دریافت خدمت در ایستگاه اول، به‌صف دومین ایستگاه می‌پیوندد. بالاخره پس از دریافت خدمت از K امین ایستگاه هم از سیستم خارج می‌شود.

یك خط تولید را در نظر بگیرید. هر قطعه، ایستگاههای مختلف کار را طی می‌کند تا از خط خارج شود. البته بدیهی است که در خطوط تولید مدت‌زمان دریافت خدمت لزوماً نمایی نیست.

ظرفیت صف در ایستگاههای مختلف می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. ابتدا حالتی را بررسی می‌کنیم که ظرفیت صف در همهٔ ایستگاهها نامتناهی باشد. در چنین حالتی، و با استفاده از قضایای زیر نشان داده می‌شود که هر ایستگاه خدمت را می‌توان یك مدل نمایی $M/M/m$ فرض کرد، که ورود مشتریها به آن طبق فرایند پواسون با پارامتر λ است.

قبل از بحث دربارهٔ رابطه بین ایستگاههای خدمت در یك شبکهٔ سری، ابتدا لازم است تابع توزیع زمان بین دو خروج متوالی مشتریهای یك سیستم مورد بررسی قرار گیرد.

قضیهٔ ۴.۷ در یك سیستم صف، اگر $\rho < 1$ باشد، آهنگ خروج مشتریها برابر با آهنگ ورود آن و اگر $\rho \geq 1$ باشد، آهنگ خروج برابر با مجموع آهنگ خدمت مشتریهاست.

در قضیهٔ فوق باید در نظر داشت که اگر $\rho \geq 1$ باشد، بدیهی است که خدمت‌دهندگان، دائماً مشغول خدمت هستند و درنتیجه آهنگ خروج برابر با ظرفیت کل خدمت‌دهندگان، یعنی $m\mu$ است. اما اگر $\rho < 1$ باشد، طبیعتاً خدمت‌دهندگان به‌طور متوسط (ρ) درصد اوقات مشغول ارائهٔ خدمت هستند و آهنگ خروج، کمتر از ظرفیت آنها، و برابر با آهنگ ورود مشتریهاست.

مثال ۱۴.۷ یك مدل $M/M/2$ را در نظر بگیرید، که هر ساعت به‌طور متوسط ۳۰ مشتری وارد می‌شوند. مدت زمان خدمت، نمایی با میانگین ۳ دقیقه است. درنتیجه، هر خدمت‌دهنده می‌تواند به ۲۰ مشتری و کل سیستم به ۴۰ مشتری در ساعت خدمت

ارائه کند. اما چون تعداد مشتریهایی که مراجعه می‌کنند، کمتر از این تعداد است، لذا درهر ساعت به‌طور متوسط فقط ۳۰ مشتری خدمت دریافت و از سیستم خارج می‌شوند. دراین مثال، اگر آهنگ ورود مشتریها از ۳۰ به ۵۰ تغییر کند، $\rho>1$، وظرفیت خدمت‌دهندگان کمتر از میزانی است که بتوانند تقاضای مشتریان را تامین کنند و لذا طول صف مرتب افزایش می‌یابد و به‌بینهایت می‌رسد. بدین‌ترتیب، خدمت دهندگان همواره باید کار کنند و درنتیجه آهنگ خروج برابر با ۴۰ خواهد بود.

با استفاده ازقضیهٔ زیر، نشان داده می‌شود که درمدلهای نمایی نه تنها آهنگ خروج برابر با آهنگ ورود مشتریهاست، بلکه تابع توزیع زمان بین دو خروج متوالی مشتریها نیزبا تابع‌توزیع زمان بین‌دو ورود آنها یکسان است (به‌شرط اینکه $\rho<1$ وظرفیت صف نامتناهی باشد).

قضیهٔ ۵.۷ در یک مدل $M/M/1$ با $\rho<1$ و بدون تناهی در ظرفیت صف، زمان بین دوخروج متوالی مشتریها، متغیر تصادفی‌نمایی با پارامتر λ (آهنگ ورودمشتریها) است.

اثبات. یک لحظهٔ مشخص را، که یک‌مشتری از سیستم خارج می‌شود، درنظر بگیرید. زمان بین دوخروج متوالی مشتریها، درواقع مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا مشتری بعدی از سیستم خارج شود. این متغیر تصادفی را با E نشان می‌دهیم و هدف محاسبهٔ $P(E>t)$ است. حال فرض کنید که درلحظهٔ خروج مشتری موردنظر، تعداد مشتری در سیستم برابر با N باشد. دراین صورت،

$$P(E>t)=P(E>t|N=0)P(N=0)+P(E>t|N>0)P(N>0) \tag{۶۳.۷}$$

با استفاده از روابط موجود درمدل $M/M/1$ داریم:

$$P(N>0)=\rho \quad , \quad P(N=0)=\pi_0=1-\rho \tag{۶۴.۷}$$

از طرف دیگر، اگردرلحظهٔ موردنظر، تعدادی مشتری دیگر هم درسیستم باشند، مدت‌زمان E، یا مدت‌زمانی که طول می‌کشد تامشتری بعدی ازسیستم خارج شود، برابربا مدت‌زمان دریافت خدمت (یا X) توسط مشتری بعدی است. لذا،

$$P(E>t|N>0)=P(X>t)=e^{-\mu t} \tag{۶۵.۷}$$

اما، چنانچه درلحظهٔ خروج مشتری موردنظر، هیچ مشتری دیگری درسیستم نباشد، مدت زمانی که طول می‌کشد تا مشتری بعدی خارج شود، برابر با مجموع مدت زمانی که طول می‌کشد تااولین مشتری واردسیستم شود (یعنی T) ومدت‌زمان دریافت خدمت توسط‌همین مشتری (یعنی X) است. لذا

$$P(E>t|N=0)=P(T+X>t)=\frac{\mu e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\mu t}}{\mu-\lambda} \tag{۶۶.۷}$$

(اثبات رابطهٔ فوق درمسئلهٔ شمارهٔ ۲۹ فصل ۳ خواسته شده است)

پس از جایگزین کردن روابط (۶۴.۷) و (۶۵.۷) و (۶۶.۷) دررابطهٔ (۶۳.۷) نتیجه می‌شود که،

$$P(E>t)=e^{-\lambda t}$$

قضیهٔ فوق در مورد مدلهای $M/M/m$ نیز صادق است. قضیهٔ زیر، بدون اینکه اثبات آن ارائه شود، این موضوع را بیان می‌کند

قضیهٔ ۶.۷ دریک مدل $M/M/m$، با $\rho<1$ و بدون متناهی بودن ظرفیت، زمان بین دو خروج متوالی مشتریها متغیر تصادفی نمایی با پارامتر λ (آهنگ ورود مشتریها) است

با استفاده ازقضیهٔ زیر، شبکه‌های سری را می‌توان تحلیل کرد.

قضیهٔ ۷.۷ یک سیستم سری با K ایستگاه خدمت را درنظر بگیرید. ورود مشتریها به‌سیستم (یا ورود مشتریها به‌ایستگاه اول) براساس فرایند پواسون (با پارامتر λ) ومدت زمان خدمت درهرایستگاه، نمایی فرض می‌شود. درهرایستگاه تعدادی خدمت‌دهنده مشغول خدمت هستند. دراین صورت، هر ایستگاه خدمت را می‌توان یک مدل مستقل $M/M/m$ تصور کرد، که آهنگ ورود به‌آن همان آهنگ ورود مشتریها به‌سیستم (λ) است، بشرط براینکه درهمه ایستگاهها ظرفیت صف نامتناهی، ومجموع آهنگ خدمت دهی خدمت دهندگان آن ایستگاه از λ بیشترباشد.

اثبات: در مورد اولین ایستگاه موضوع روشن است. طبق قضیهٔ ۴.۷، مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ λ از ایستگاه اول خارج و به ایستگاه دوم وارد می‌شوند. لذا، ایستگاه‌دوم نیز یک مدل $M/M/m$ باآهنگ ورود λ است. به‌همین‌ترتیب، بقیهٔ‌ایستگاهها را نیز می‌توان سیستمهای مستقل $M/M/m$ تصور کرد.

بااستفاده ازقضیهٔ ۷.۷ وبا توجه به‌اینکه‌می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم سری به سهولت انجام می‌شود. به عبارت دیگر، اگر $\pi_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ معرف احتمال بودن n_1 مشتری درمرحلهٔ اول، n_2 مشتری درمرحله دوم و n_k مشتری درمرحله n ام باشد،

$$\pi_{n_1,n_2,\ldots,n_k}=(\pi^{(1)}_{n_1})(\pi^{(2)}_{n_2})\cdots(\pi^{k}_{n_k}) \tag{۶۷.۷}$$

که $\pi^{(i)}_{n_i}$ معرف احتمال بودن n_i مشتری درایستگاه i ام است.

به‌همین‌ترتیب،

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \qquad (68.7)$$

که L_i میانگین تعداد مشتریهایی است که درمرحلهٔ i درحال دریافت خدمت هستند، و براساس روابط مدل $M/M/m$ قابل محاسبه است. درمورد سایر معیارهای ارزیابی نیز به‌همین ترتیب عمل می‌شود

مثال ۱۵.۷ در یك تعمیرگاه، تعمیر یك ماشین از سه مرحله تشکیل می‌شود. مرحلهٔ اول پیاده کردن ماشین، مرحلهٔ دوم تشخیص و رفع عیب ومرحلهٔ سوم سوار کردن ماشین است. مدت‌زمان لازم برای اجرای هر مرحله، متغیرتصادفی نمایی است، ومیانگین آنها به‌ترتیب ۲ و ۲ و ۱ روزاست. تقاضا برای تعمیر ماشین براساس فرایند پواسون است و به‌طور متوسط هر ۱۰ روز یك ماشین برای تعمیر به‌این تعمیرگاه می‌رسد. درمرحلهٔ سوم دوتعمیرکارکار می‌کنند، ولی در مراحل اول ودوم فقط یك تعمیرکارمشغول است. احتمال اینکه دریك لحظه فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، چیست؟ احتمال اینکه دومشتری در سیستم باشند، چیست؟ میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدراست؟

حل: این مدل یك سیستم سری با سه ایستگاه خدمت است، که در آن

$$m_3 = 2,\quad m_1 = m_2 = 1,\quad \mu_2 = \frac{1}{2},\quad \mu_1 = \frac{1}{2},\quad \lambda = \frac{1}{10}$$

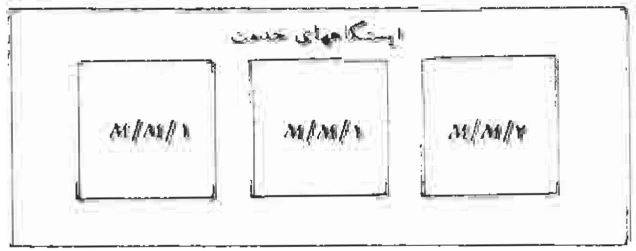
است (شکل ۱۱.۷). درهرسه ایستگاه $\rho_i < 1$ است.

احتمال اینکه در یك لحظه فقط مرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، برابر است با اینکه مراحل اول وسوم مستقلاً فاقد مشتری ومرحلهٔ دوم دارای مشتری باشد، یعنی به‌ازای $n > 0$
(و)

$$\pi_{0,n,0} = (1-\rho_1)(\rho_2)(\pi_n^{(3)}) = (0.8)(0.4)\frac{0.95}{1.05} = 0.29$$

احتمال اینکه دونفر مشتری درسیستم باشند، برابر با π_{n_1,n_2,n_3} است، به‌شرط اینکه، $n_1 + n_2 + n_3 = 2$. بدین‌ترتیب، این احتمال برابراست با

$$\pi_{2,0,0} + \pi_{1,1,0} + \pi_{1,0,1} + \pi_{0,0,2} + \pi_{0,2,0} + \pi_{0,1,1} = 0.15$$



شکل ۱۱.۷ سیستم سری مربوط به مثال

ومیانگین زمان انتظار درسیستم برابراست با:

$$W = W_1 + W_2 + W_3 = 3.17 \quad \text{روز}$$

باید توجه داشت که درشبکه‌های سری، اگرچه برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم می‌توان ایستگاههای خدمت را مستقل فرض کرد، ولی این موضوع به‌معنای آن نیست که مدت‌زمان انتظار یك مشتری مشخص دریك ایستگاه مستقل از مدت‌زمان انتظار او درسایر ایستگاهها باشد. مسئلهٔ ۳۰ آخر همین فصل، این موضوع را نشان می‌دهد. لیکن، برای مشتریها به‌طور متوسط (و نه برای هرمشتری مشخص) معیارهای ارزیابی را می‌توان براساس استقلال ایستگاهها به‌دست آورد.

سیستمهای سری با ظرفیت متناهی صف

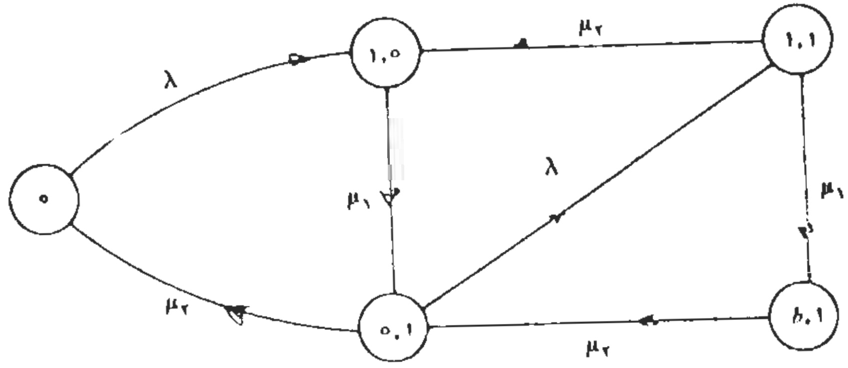
حال فرض کنید که ظرفیت صف در بعضی ازایستگاههای خدمت متناهی باشد. به‌عنوان نمونه، یك ایستگاه را درنظر بگیرید که ظرفیت صف در آن برابر با صفر (یا هرعدد دیگر) باشد. دراین صورت، امکان دارد که یك مشتری پس ازدریافت خدمت ازمرحلهٔ قبلی وارد این ایستگاه‌شود ومواجه با تکمیل‌بودن ظرفیت این ایستگاه‌گردد. درچنین حالتی دواتفاق می‌تواند بیفتد.

۱. این مشتری ازسیستم خارج شود و خدمتی را که درایستگاههای بعدی ارائه می‌شود، ازسیستمهای دیگری دریافت کند. دراین حالت، فرض می‌شود که این مشتری دیگر به‌این سیستم برنمی‌گردد.

۲. این مشتری درایستگاه قبلی منتظر بماند. دراین حالت، خدمت دهندهٔ ایستگاه قبلی اجباراً ازادامهٔ خدمت به مشتریهای دیگر باز می‌ماند؛ زیرا، فضا ویا امکانات ارائهٔ خدمت توسط این مشتری اشغال شده‌است.

مثال ۱۶.۷ سیستم صفی را درنظر بگیرید که از دوایستگاه خدمت به‌طور سری تشکیل شده است. ظرفیت صف درهردوایستگاه برابربا صفراست. ورود مشتریها به‌سیستم براساس فرایند پواسون با پارامتر λ و زمان خدمت درهرایستگاه دارای توزیع نمایی با پارامترهای μ_1 و μ_2 فرض می‌شود. چنانچه مشتری پس‌ازپایان‌دریافت خدمت ازایستگاه اول، به‌علت پربودن ایستگاه دوم نتواند وارد آن ایستگاه شود، اجبار دارد که درهمان ایستگاه اول منتظر بماند. دراین سیستم حالتهای مختلف عبارت‌اند از:

۱. (0) هردو ایستگاه خالی است.
۲. $(1, 0)$ ایستگاه اول دارای مشتری وایستگاه دوم خالی است.
۳. $(0, 1)$ ایستگاه اول خالی و ایستگاه دوم دارای مشتری است.
۴. $(1, 1)$ در هردو ایستگاه یك مشتری درحال دریافت خدمت است.
۵. $(b, 1)$ درایستگاه اول مشتری خدمت را دریافت داشته و منتظراست که ایستگاه



شکل ۱۲.۷ نمودار آهنگ مثال ۱۶.۷

دوم خالی شود و یک مشتری هم در ایستگاه دوم مشغول دریافت خدمت است.

باید توجه داشت که حالتهای شمارهٔ ۲ و ۵ با یکدیگر متفاوت‌اند، اگرچه در هر دو حالت دومشتری، هر مشتری در یک ایستگاه، وجود دارد. نمودار آهنگ این مدل در شکل ۱۲.۷ نشان داده شده است. معادلات تعادلی در این سیستم به‌شرح زیرند.

$$\lambda\pi_{0} = \mu_2\pi_{0,1}$$

$$\mu_1\pi_{1,0} = \lambda\pi_0 + \mu_2\pi_{11}$$

$$(\lambda+\mu_2)\pi_{0,1} = \mu_1\pi_{1,0} + \mu_2\pi_{b,1}$$

$$(\mu_2+\mu_1)\pi_{11} = \lambda\pi_{0,1}$$

$$\mu_2\pi_{b,1} = \mu_1\pi_{1,1}$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق، محاسبهٔ معیارهای ارزیابی سیستم ممکن می‌شود.

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda^2}{\mu_1\mu_2} + \frac{\mu_1\lambda^2}{\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)}\right]^{-1}$$

شبکه‌های صف درحالت کلی

در یک شبکهٔ صف، که لزوماً یک سیستم سری نیست، فرض می‌شود که K ایستگاه خدمت وجود دارد. مشتری نیاز به خدمات بعضی از ایستگاهها دارد و ضمناً ترتیب مراجعهٔ او نیز از قبل مشخص نیست. بدین‌ترتیب، مشتری وقتی وارد سیستم می‌شود، برای او این بار ممکن است به هر کدام از ایستگاههای خدمت مراجعه کند. پس از دریافت خدمت از این ایستگاه، به‌هر کدام از ایستگاههای دیگر می‌تواند وارد شود. بدین‌ترتیب، مشتریهای هر

ایستگاه یا مستقیماً از خارج وارد می‌شوند یا از ایستگاههای دیگر مراجعه می‌کنند. شبکه‌های صف بسیار متنوع هستند و حل اکثر آنها، با روشهای تحلیلی ممکن نیست. حالت خاصی که **شبکه‌های جاکسون** نامیده می‌شود، براساس مفروضات زیر است.

مفروضات شبکه‌های صف جاکسون

الف. ورود مشتریها از خارج سیستم به‌ایستگاه خدمت شمارهٔ j طبق فرایند پواسون با آهنگ λ'_j (به‌ازای $j=1,2,\dots K$) است.

ب. مدت‌زمان خدمت در ایستگاه شمارهٔ j، متغیری تصادفی و نمایی با پارامتر μ_j و مستقل از مدت خدمت در سایر ایستگاهها فرض می‌شود.

ج. ظرفیت صف در همهٔ ایستگاهها نامتناهی است.

د. یک مشتری که از ایستگاه i خارج می‌شود، به‌احتمال p_{ij} برای دریافت خدمت به‌ایستگاه j مراجعه می‌کند. احتمال اینکه مشتری پس از دریافت خدمت از ایستگاه i، از سیستم خارج شود را با p_{i0} نشان می‌دهند.

حالت خاص سیستم سری یک حالت خاص از شبکه‌های جاکسون فرض می‌شود، که در آن

$\lambda'_j = 0$

$$p_{k0}=1,\quad p_{i,i+1}=1,\quad (j=1,2,\dots K \text{ به‌ازای}) \cancel{=0},\quad \lambda'_1=\lambda$$

آهنگ ورود مشتریان به‌هر ایستگاه

همان‌طور که گفته شد، ورودیهای هر ایستگاه بردو نوع‌اند، یا از خارج سیستم و یا از سایر ایستگاهها. بنابراین، اگر λ_j معرف **آهنگ ورود مشتریها به‌ایستگاه** j ام باشد،

$$\lambda_j = \lambda'_j + \sum_{k=1}^{K}\lambda_k p_{kj}, \quad j=1,2,\dots,K \qquad (۶۹.۷)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $\lambda_i p_{ij}$ آهنگ مشتریهایی است که پس از دریافت خدمت در ایستگاه i ام به ایستگاه j مراجعه می‌کنند.

بازخورد

در حالت کلی، یک مشتری پس از دریافت خدمت در ایستگاه j ام، ممکن است بازهم به‌همین ایستگاه برگردد، تا مجدداً خدمت دریافت کند. به‌این حالت بازخورد می‌گویند. بازخورد می‌تواند بلافاصله باشد، یعنی $p_{jj}>0$ و یا مشتری پس از مراجعه به‌ایستگاههای مختلف مجدداً به‌ایستگاه j برگردد.

برای نمونه یک قطعه، درخط تولید، ممکن است پس از گذراندن یک ایستگاه،

به‌علت عدم تطابق با استانداردهای کنترل کیفیت، مجدداً به همان ایستگاه برای اصلاح فرستاده شود.

قضیهٔ ۸.۷ در یک شبکهٔ صف با مفروضات فوق، اگر تمام حالتها بدون بازخورد باشد، ورودی تمام ایستگاهها براساس فرایند پواسون است.

بدین‌ترتیب، در یک شبکهٔ صف با مفروضات فوق و بدون بازخورد، هر ایستگاه مستقل و به صورت یک مدل نمایی عمل می‌کند.

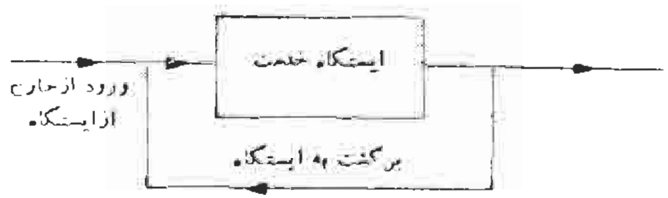
اما چنانچه یک ایستگاه خدمت دارای بازخورد (اعم از مستقیم یا غیر مستقیم) باشد، ورودی کلی به آن ایستگاه، دیگر طبق فرایند پواسون نخواهد بود. در شکل ۱۳.۷، چنین ایستگاهی نشان داده شده است. مشتریهایی که برای دریافت خدمت مراجعه می‌کنند، بر دو نوع‌اند. تعدادی از آنها از خارج سیستم وارد می‌شوند و تعدادی از آنها هم‌مشتریهای قبلی ایستگاه هستند، که برای دریافت خدمت مجدد به‌ایستگاه برمی‌گردند. در این ایستگاه، حتی اگر تعداد مشتریهایی که از خارج سیستم مراجعه می‌کنند، بر اساس فرایند پواسون باشد، چون مشتریهای بازخوردی، فرایند پواسون تشکیل نمی‌دهند، لذا کل ورودی سیستم لزوماً طبق فرایند پواسون نیست.

نکتهٔ جالب توجه این است که حتی درمورد سیستمهایی که بازخورد دارند، اگرچه ورودی ایستگاهها دیگر نمی‌تواند براساس فرایند پواسون باشد و نتیجتاً هر ایستگاه طبق مدلی نمایی عمل نمی‌کند، ولی با استفاده از قضیهٔ زیر، روابطی به‌دست می‌آید که می‌توان نظیر مدلهای مستقل با آنها برخورد کرد.

قضیهٔ ۹.۷ یک شبکهٔ صف با مفروضات فوق (با بازخورد و یا بدون بازخورد) را، که درهمهٔ ایستگاههای آن $\rho<1$ و ظرفیت صف نامتناهی است، درنظر بگیرید. دراین‌صورت، دردرازمدت رابطهٔ زیر همیشه برقرار است:

$$\pi_{n_1,n_2,\dots,n_K}=\prod_{j=1}^{K}\pi^{(j)}_{n_j}$$

که $\pi^{(j)}_{n_j}$ معرف احتمال بودن n_j مشتری درایستگاه j و $\pi_{n_1,n_2,\dots,n_K}$ معرف بودن n_1



شکل ۱۳.۷ ایستگاه خدمت با بازخورد

مشتری در ایستگاه اول، n_2 مشتری در ایستگاه دوم و... n_K مشتری در ایستگاه Kام است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با وجود اینکه ایستگاهها، سیستمهای نمایی نیستند، برای محاسبهٔ تابع توزیع تعداد مشتریان، می‌توان سیستم را دارای K مدل نمایی مستقل فرض کرد. به‌همین‌ترتیب،

$$L=L_1+L_2+\dots+L_K$$

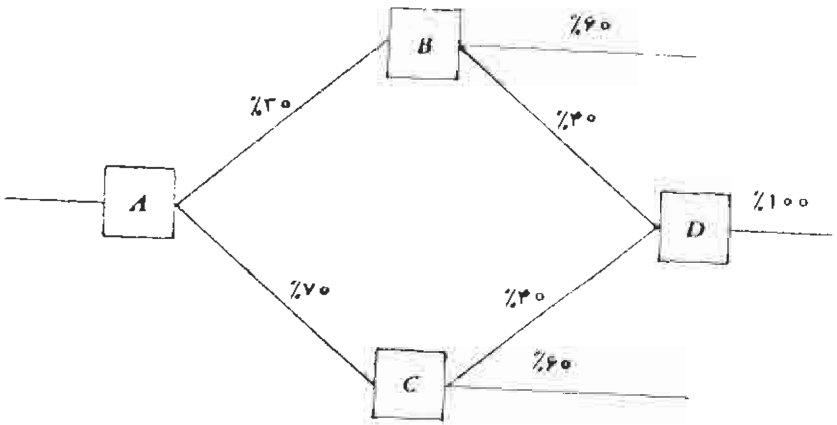
که L_i معرف میانگین تعداد مشتری درایستگاه iام است.

مثال ۱۷.۷ در یک درمانگاه، بیماران ابتدا برای ثبت‌نام و تکمیل پرونده به‌قسمت A مراجعه می‌کنند. این درمانگاه دارای سه پزشک B و C و D است. ۳۰ درصد بیماران به‌پزشک B و ۷۰ درصد بقیه‌به C مراجعه می‌کنند. هرکدام ازاین دوپزشک نیز ۴۰درصد بیماران خود را برای تکمیل معاینات به پزشک D ارجاع می‌دهند. تعداد بیمارانی که به این درمانگاه مراجعه می‌کنند، فرایندی پواسون با میانگین ساعتی ۱۶ بیمار است. مدت‌زمان ثبت‌نام وتکمیل پرونده وهمچنین معاینهٔ بیماران، متغیرهای تصادفی نمایی بامیانگین به‌ترتیب ۳، ۷٫۵، ۳٫۷۵ و ۷٫۵ دقیقه است. مدت‌زمان انتظار هرمشتری درسیستم چقدر است؟

حل: این سیستم صف یک شبکهٔ جاکسون و بدون بازخورد است. این شبکه را به‌صورت زیر می‌توان نشان داد (شکل ۱۴.۷).

دراین مدل،

$$p_{BO}=0.6,\ p_{BD}=0.4,\ p_{AC}=0.7,\ p_{AB}=0.3,\ \lambda'_B=\lambda'_C=\lambda'_D=0,$$



شکل ۱۴.۷ شبکهٔ مثال ۱۷.۷

۱۰۳

$$\lambda'_A=16,\ \mu_4=8,\ \mu_3=16,\ \mu_2=8,\ \mu_1=20,\ p_{D0}=1,\ p_{C0}=0.6,$$

$$p_{CD}=0.4,$$

دراین مدل چون هیچ کدام از ایستگاهها بازخورد ندارند، لذا ورودی آنها طبق فرایند پواسون است، ضمناً

$$\lambda_A=16$$

$$\lambda_B=(0.3)(16)=4.8$$

$$\lambda_C=(0.7)(16)=11.2$$

$$\lambda_D=(0.4)(4.8)+(0.4)(11.2)=6.4$$

$$\rho_D=0.8,\ \rho_C=0.7,\ \rho_B=0.6 \qquad ,\rho_A=\frac{\lambda_A}{\mu_A}=\frac{16}{20}=0.8,$$

اگر $\pi_0^{(i)}$ را معرف احتمال خالی بودن ایستگاه i بگیریم، خواهیم داشت:

$$\pi_0^{(4)}=0.2,\ \pi_0^{(3)}=0.3,\ \pi_0^{(2)}=0.4,\ \pi_0^{(1)}=0.2$$

هر ایستگاه را می‌توان مستقلاً یک مدل $M/M/1$ تصور کرد. لذا،

$$L_4=4,\quad L_3=\frac{7}{3},\ L_2=1.5\ ,\ L_1=4$$

درنتیجه طول صف برابر است با:

$$L=\frac{71}{6}=11.833$$

ازطرف دیگر، امید ریاضی مدت زمان انتظار یک مشتری برابر با امید ریاضی مدت‌زمان انتظار او در هر ایستگاه است؛ ولی، مشتریها بهمهٔ ایستگاهها نمی‌روند. درواقع، همهٔ مشتریها ایستگاه ۱ را طی می کنند، ۳۰ درصد آنها بهایستگاه دوم می‌روند، ۷۰ درصد آنها بهایستگاه سوم و ۴۰ درصد بهایستگاه چهارم می‌روند، لذا

$$W=W_1+0.3\,W_2+0.7\,W_3+0.4\,W_4$$

W_i میانگین مدت‌زمان انتظار یک مشتری درایستگاه i ام است و چون هرایستگاه، یک‌مدل $M/M/1$ محسوب می‌شود، لذا محاسبهٔ آنها نیز با استفاده ازرابطهٔ W در $M/M/1$ انجام می‌شود؛ یعنی،

$$W=0.74\ \text{ساعت است}\ ,\quad W_4=\frac{5}{8},\ W_3=\frac{5}{22},\ W_2=\frac{5}{16}$$

می‌توان بررسی کرد که رابطهٔ $L=\lambda W$ همچنان صادق است.

مثال ۱۸۰۷ یک سیستم صف را درنظر بگیرید،که سه ایستگاه خدمت ۱ و ۲ و ۳ داشته باشد. ورود مشتریها از خارج به این ایستگاهها طبق فرایند پواسون به‌ترتیب با آهنگ ۵ و ۱۰ و ۱۵ است. مدت زمان خدمت، نمایی، به ترتیب با آهنگ ۱۰ و ۴۰ و ۶۰ است. مشتریهایی که از ایستگاه ۱ خارج می‌شوند، با احتمالات مساوی به‌ایستگاههای ۲ و ۳ می‌روند. مشتریهایی که‌از ایستگاه ۲ خارج‌می‌شوند، همگی به‌ایستگاه۳ می‌روند. چهل درصد مشتریهای ایستگاه ۳ به‌ایستگاه ۲ برمی گردند وبقیه ازسیستم خارج می‌شوند. L و W را محاسبه کنید.

حل: این سیستم یک شبکهٔ صف با بازخورد است. اگر آهنگ ورود به ایستگاههای ۱ و ۲ و ۳ را به‌ترتیب λ_1 و λ_2 و λ_3 بنامیم، طبق رابطهٔ (۶۵.۷)،

$$\lambda_1=5$$

$$\lambda_2=10+0.5\lambda_1+0.4\lambda_3$$

$$\lambda_3=15+0.5\lambda_1+\lambda_2$$

نتیجه می‌شود که: $\lambda_1=5$ و $\lambda_2=32.5$ و $\lambda_3=50$ است

به این ترتیب،

$$L=L_1+L_2+L_3=\frac{31}{3}\ ,\ \rho_3=\frac{5}{6}\ ,\ \rho_2=0.8125\ ,\ \rho_1=0.5$$

برای محاسبهٔ W از رابطهٔ لیتل استفاده می‌شود. لازم به یادآوری‌است که آهنگ ورود به سیستم $\lambda'_1+\lambda'_2+\lambda'_3=5+10+15=30$ است، که این مقدار برابربا مجموع آهنگ ورود به‌ایستگاههای مختلف نخواهدبود. دررابطهٔ لیتل، منظور از آهنگ ورود، میانگین کل مشتریهایی است که درواحدزمان ازخارج سیستم وارد آن می‌شوند. بنابراین، مشتریهای هر ایستگاه را،که ممکن است چندبار وارد ایستگاههای مختلف شوند، باید فقط یک‌بار درکل سیستم منظور کرد. بدین‌ترتیب

$$W=\frac{L}{\lambda'_1+\lambda'_2+\lambda'_3}=\frac{31}{90}$$

مسائل

۱. دریک سیستم صف، ورود مشتریها براساس‌فرایند پواسون (با آهنگ λ) انجام‌می‌شود. این سیستم دارای دو خدمت‌دهنده‌است. مدت ارائهٔ خدمت‌توسط هرکدام ازخدمت‌دهندگان دارای توزیع‌نمایی (با پارامترهای μ_1 و μ_2) است. اگر سیستم خالی باشد، مشتری به

۱۰۴

احتمال ۴ر۰ خدمت‌دهندهٔ اولی و به احتمال ۶ر۰ خدمت‌دهندهٔ دومی را انتخاب می‌کند. اما، اگرحداقل یکی ازخدمت‌دهندگان مشغول باشند، مشتری حق انتخاب خدمت‌دهنده را ندارد.

این مسئله را به‌شکل یك سیستم مارکوفی فورموله ونمودار آهنگ آن را رسم کنید ومعادلات تعادلی آن را بنویسید (حل معادلات لازم نیست). میانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را برحسب احتمالات حدی به‌دست آورید. میانگین تعداد خدمت‌دهندگان بیکار چقدر است؟ احتمال اینکه یك مشتری ازخدمت‌دهندهٔ اولی خدمت دریافت کند، چقدراست؟

۲. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظر بگیرید، که در آن $\mu_1 > \mu_2$ است. اگر هر دو خدمت دهنده بیکار باشند، مشتری همواره خدمت‌دهندهٔ یك و درغیراین‌صورت هرخدمت‌دهنده‌ای را که بیکار باشد انتخاب می‌کند. به‌سؤالات مسئلهٔ ۱ مجدداً پاسخ دهید. درچه‌درصدی اززمان، هرکدام ازخدمت‌دهندگان بیکارند؟

۳. ماشینهایی که‌دارای سه‌موتورهستند، برای تعمیر به‌تعمیرگاهی فرستاده می‌شوند. به‌طور متوسط، هرچهار ساعت یك ماشین به تعمیرگاه می‌رسد وفرض می‌شود که ورود ماشینها براساس فرایند پواسون است. مدت زمان تعمیر هرموتور (و نه هرماشین)، دارای توزیع نمایی با میانگین ۲۰ دقیقه‌است. درهرلحظه فقط یك موتور می‌تواند تحت تعمیر باشد.
الف. حالت سیستم را تعداد موتورهای داخل تعمیرگاه‌تعریف کنید. نمودار آهنگ‌را رسم کنید و معادلات تعادلی آن را بنویسید. تقریباً ۵
ب. این مسئله طبق چه‌مدلی‌است؟ میانگین مدت‌زمانی که یك ماشین داخل تعمیرگاه‌می‌ماند، چقدراست؟

۴. درمسئلهٔ ۳، فرض کنید که هرسه موتورماشین لزوماً احتیاج به‌تعمیر ندارند. به‌احتمال ۱/۳ یك موتور، به‌احتمال ۱/۳ دوموتور و به‌احتمال ۱/۳ هرسه‌موتور احتیاج به‌تعمیر دارند. دراین صورت، این مسئله را مجدداً حل کنید.

۵. یك سیستم صف بایك خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید، که دونوع مشتری به‌آن مراجعه می‌کند. مشتریهای نوع ۱ برنوع ۲ اولویت دارند. ورود هردونوع مشتری براساس فرایند پواسون (با میانگین به‌ترتیب ۱ و ۵ در ساعت) است. مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. اولویت باداشتن حق‌انقطاع فرض می‌شود.
الف. میانگین مدت‌زمان انتظاردرسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم را حساب کنید.
ب. میانگین مدت‌زمان انتظار درسیستم ومیانگین تعداد مشتریهای داخل سیستم، به‌فرض اینکه اولویت منظورنشود را ازبند الف محاسبه کنید.
ج) معادلات تعادلی این مدل رابنویسید

۶. درقسمت‌باریك فرودگاه‌بسته‌های محتوی‌چمدانها را برای بازرسیهای امنیتی‌می‌آورند.

زمان بین آمدن هردوبسته، نمایی بامیانگین ۲۰ دقیقه فرض می‌شود. در ۵۰ درصد بسته‌ها، شش چمدان ودر ۵۰ درصد دیگر، چهارچمدان وجوددارد. مدت‌زمان بازرسی یك‌چمدان، نمایی با میانگین ۳ دقیقه فرض می‌شود.
الف. اگر فقط یك بازرس وجود داشته باشد، احتمال اینکه بیکار باشد، چیست؟ احتمال اینکه فقط یك چمدان دیگر در بازرسی مانده باشد، چیست؟
ب. چنانچه سه‌بازرس کار کنند، نمودار آهنگ را رسم کنید و معادلات تعادلی را بنویسید.

۷. دریك کورهٔ الکتریکی، مدت‌زمان حرارت‌دادن قطعات، نمایی‌بامیانگین دوساعت‌است. سه‌قطعه را به‌طورهمزمان می‌توان داخل کوره جا داد، اما درصورت نبودن قطعات، کوره را بایك یا دوقطعه هم راه‌اندازی می‌کنند. رسیدن قطعات برای اعمال حرارتی درکوره، طبق فرایند پواسون با آهنگ ۲ر۵ ساعت است. میانگین قطعاتی که منتظرهستند تا داخل کوره شوند، چقدر ست؟

۸. برای حمل اتومبیلها از عرض یك رودخانه، ازقایقی مخصوص استفاده می‌شود، که گنجایش‌پنج اتومبیل را دارد. اتومبیلها طبق فرایند پواسون، بامیانگین ساعتی ۱۵ دستگاه برای عبورازرودخانه مراجعه می‌کنند. مدت رفت و برگشت قایق متغیری تصادفی باتوزیع نمایی است وبه‌طور متوسط ۱۲ دقیقه طول می‌کشد. احتمال اینکه اتومبیلی مراجعه کند و بلافاصله سوارقایق‌شود و از رودخانه عبور کند، چقدراست؟ میانگین تعداد اتومبیلهایی که منتظر عبور کنند، چقدراست؟ (فرض می‌کنیم که قایق حتماً باید پرشود تا حرکت کند).

۹. مشتریها طبق‌فرایندپواسون‌واردسیستم‌می‌شوند. تعدادمشتری واردشده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ نفرفرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه‌طول می‌کشد. میانگین طول صف را، درصورتی که مدت زمان خدمت، نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با $r = 4$) باشد، محاسبه کنید.

۱۰. درمحل انبارابزار کارخانه‌ای دوانباردار کار می‌کنند. اولی مسئول تحویل ابزار ماشین‌آلات و دومی مسئول تحویل سایر ابزارآلات است. کارگران برای دریافت ابزار طبق فرایند پواسون ($\lambda = 25$ درساعت) وارد انبار می‌شوند و ۲۰٪ آنان متقاضی ابزار ماشین‌آلات هستند. مدت‌زمان تحویل ابزار، نمایی بامیانگین ۳ دقیقه است. بررسی انجام شده نشان می‌دهد که اگر هر دو انباردار مشترکاً کار کنند، مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط $1/\lambda$ دقیقه کاهش می‌یابد و تابع توزیع آن E_2 خواهد بود. کدام روش بهتراست؟

۱۱. برای ادارهٔ ماشینی می‌توان یکی از دونفر داوطلب را استخدام کرد. اولی با این ماشین ۶ واحد محصول موردنظر و دومی ۵ واحد آنرا در روز، به‌طور متوسط تولید می‌کنند. مدت زمان تولید توسط اولی، نمایی و توسط دومی ارلانگی با $r = 2$ است. کدام یك ازاین دونفر را باید استخدام کرد؟ فرض کنید که‌تقاضا برای تولیدمحصول طبق فرایند پواسون با پارامتر λ است.

۱۲. قسمت کنترل کیفیت‌کارخانه‌ای، قطعات معیوبی راکه با استانداردها تطبیق نمی‌کنند

۱۰۵

برای اصلاح وتنظیم مجدد بـه قسمت تولید برمی‌گرداند. فرض می‌کنیم که به‌طورمتوسط هر ۱۵ر۱ دقیقه، یك قطعه معیوب شناخته می‌شود وفاصلهٔ زمانی بین فرستادن هر دوقطعه نیز نمایی است. برای اصلاح این قطعات یکی‌از دو روش زیر را می‌توانیم انتخاب کنیم. به کدام روش قطعات معیوب را پس از اصلاح زودتر به‌تولید برمی‌گرداند؟

الف. به کارگیری دو تعمیرکار، که هر کدام می‌توانند به‌طور متوسط یك قطعه را در ۵ر۲ دقیقه تعمیر کنند. مدت‌زمان تعمیر نمایی فرض شود.

ب. استفاده ازیك ماشین‌که هرقطعهٔ معیوب را دقیقاً در ۲۵ر۱ دقیقه تعمیرمی‌کند.

ج. در بند الف، احتمال اینکه کارگـر شمارهٔ یك بیکار بـاشد، چیست؟ مقدار احتمال را برحسب تابعی از ρ به‌دست آورید.

۱۳. مدل $M/E_2/1$ را درنظر بگیرید. فرض کنید که ظرفیت صف صفر است. نمودار آهنگ را رسم کنید. احتمال اینکه سیستم خالی باشد، چقدراست؟

۱۴. مشتریها طبق فرایندپواسون واردسیستم می‌شوند. تعداد مشتری وارد شده درهرساعت به‌طور متوسط ۵ است. مدت‌زمان خدمت به‌طورمتوسط ده‌دقیقه است. میانگین طول صف را برحسب اینکه مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی، ثابت ویا ارلانگی (با ۳ مرحله) باشد، محاسبه کنید.

۱۵. دریك مـدل $M/E_2/2/2$ نمودار آهنگ را رسم و L و W را محاسبه و صحت «رابطهٔ لیتل» را درمورد آنها تحقیق کنید. فرض کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 8$ است.

۱۶. دریك مدل $E_2/M/2/2$، نمودار آهنگ را رسم و L و W را محاسبه کنید. فرض کنید $\lambda = 20$ و $\mu = 15$ است.

۱۷. سه نوع مشتری به‌یك سیستم مراجعه‌می‌کنند. ورود مشتریهای نوع ۱، ۲ و ۳ براساس فرایند پواسون وبه‌ترتیب بـا میانگین ۲ و ۳ و ۶ مشتری درساعت است. مدت‌زمان ارائهٔ خدمت، توسط تنها خدمت‌دهندهٔ سیستم، نمایی وبا میانگین ۲ دقیقه است.

الف. میانگین مدت زمان انتظار درصف وهمچنین میانگین طول صف را درمورد هرنوع مشتری، دردوحالت زیرحساب کنید:

۱. درصورتی‌که ارائهٔ خدمت به‌مشتریهای هرسه گروه برحسب نوبت انجام شود؛

۲. درصورتی‌که‌مشتریهای نوع ۱ ازبالاترین اولویت ومشتریهای نوع ۲ ازاولویت بعدی برخوردار باشند (بدون حق انقطاع)

ب. ارتباط بین میانگین زمان انتظار وهمچنین طول صف حالت ۲ را با حالت ۱ مشخص کنید.

۱۸. مسئلهٔ ۱۷ را، بـا فرض اینکه سیستم دارای نظم اولویت باحق انقطاع است، مجدداً حل کنید.

۱۹. معادلات تعادلی را برای حالتهای mn ۱ و mn ۲، مدل $M/M/1$ با نظم اولویت و حق‌انقطاع بنویسید.

۲۰. مسئلهٔ۱ فصل ششم را درنظر بگیرید، فرض کنیدکه ماشینهای تعمیرشده را برای‌کنترل می‌فرستند.

الف. احتمال اینکه فاصله زمانی بین دو ماشینی‌که برای‌کنترل می‌فرستند، حداقل سه روز طول بکشد، چیست؟

ب. حال فرض کنیدکه به‌جای اینکه تمام ماشینها را برای کنترل بفرستند، فقط ۵۰ درصد آنها را به‌صورت تصادفی‌انتخاب می‌کنند وبرای‌کنترل می‌فرستند. مدت‌زمان کنترل،نمایی با میانگین ۱/۸ روز فرض می‌شود. اگرماشینی برای‌کنترل فرستاده شود، به‌طور متوسط، ازلحظهٔ اتمام تعمیرتا لحظهٔ خروج آن ازسیستم چقدرطول می‌کشد؟

ج. دربند ب، فرض‌کنید کـه ماشینها را یك درمیان (نه به‌صورت تصادفی)، برای‌کنترل می‌فرستند؛ جواب بند ب را مجدداً بررسی کنید؟

۲۱. دریك مدل $M/M/1$ با نظم اولویت وبدون حق‌انقطاع وبا دوگروه مشتری، آهنگ ورود مشتریهای گروههای ۱ و ۲ به‌ترتیب λ_1 و λ_2 وآهنگ خدمت‌دهی به‌آنها μ_1 و μ_2 است. دراین نظم، نشان‌دهید میانگین مدت‌زمـان خدمت برای‌کل سیستم، یعنی W کمتر ازحالتی است‌که نظم اولویت وجود ندارد، به‌شرط اینکه $\mu_1 < \mu_2$ باشد.

۲۲. درمثال ۱۶.۷، با فرض اینکه $\lambda = 15$ و $\mu_1 = 20$ و $\mu_2 = 30$، احتمالات حدی و L و W را محاسبه کنید. چند درصد مشتریها نمی‌توانند وارد سیستم شوند؟

۲۳. مسئلهٔ ۲۲ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض‌کنیدکـه مشتری پس ازدریافت خدمت از مرحلهٔ اول، درصورتی مرحلهٔدوم را می‌گذراندکه‌آن مرحله‌خالی باشد. درغیراین‌صورت سیستم را ترك می‌کند.

الف. مجدداً به‌سؤالات مسئلهٔ ۲۲ جواب دهید.

ب. چه‌درصدی از مشتریهایی‌که وارد سیستم می‌شوند، هر دومرحله را می‌گذرانند.

۲۴. سوپرمارکتی را درنظر بگیریدکـه مشتریهایش کالاهای موردنیاز خود را شخصاً از قفسه‌ها انتخاب می‌کنند و سپس پول آن را به‌صندوقـدار می‌پردازند. مدت‌زمان انتخاب کالا وهمچنین مدت‌زمان محاسبهٔ قیمت کالا در صندوق، نمایی با میانگین به‌ترتیب ۱۵دقیقه و ۵ دقیقه است. ورود مشتریها به‌این سوپرمارکت طبق فرایند پواسون است. در هرساعت به‌طور متوسط سی مشتری مراجعه می‌کنند. حداقل چند صندوقدار برای این سوپرمارکت لازم است، میانگین مدت زمـان توقف یك مشتری دراین سوپرمـارکت (بافرض حداقل بودن تعداد صندوقداران) چقدراست؟

۲۵. دریك شبکهٔ سری، سه‌ایستگاه‌خدمت وجوددارد. ورود مشتریها به‌این‌شبکه طبق‌فرایند

پواسون با آهنگ $\lambda = ۵$ و آهنگ خدمت در سه ایستگاه به‌ترتیب ۶ و ۸ و ۲ و تعداد خدمت‌دهنده در آنها به‌ترتیب ۲ و ۱ و ۲ و ظرفیت صف در هر سه ایستگاه نامتناهی است. احتمال خالی بودن سیستم چقدر است؟ احتمال اینکه در سیستم ۳ مشتری وجود داشته باشد، چقدر است؟ L و W را محاسبه کنید.

۲۶. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً در نظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صف در ایستگاه سوم برابر با ۳ است. آن‌گاه، به سؤالات مطرح شده پاسخ مناسب ارائه کنید.

۲۷. مسئلهٔ ۲۵ را مجدداً در نظر بگیرید، با این تفاوت که ظرفیت صف در ایستگاههای دوم و سوم برابر با صفر است. معادلات تعادلی را بنویسید. L و W را محاسبه کنید.

۲۸. در یك هتل، رستوران و چایخوری کنار یکدیگر قرار دارند. مراجعهٔ مشتریها از خارج به این هتل، طبق فرایند پواسون است. هر ساعت به طور متوسط ۳۰ مشتری به هتل مراجعه می‌کنند، ۶۰ درصد آنها مستقیماً به رستوران و بقیه به چایخوری می‌روند. بعد از صرف غذا ۸۰ درصد مشتریهای رستوران به چایخوری و ۳۰ درصد مشتریهای چایخوری به رستوران مراجعه می‌کنند. لیکن، هیچ مشتری دوبار به رستوران یا چایخوری نمی‌رود. مدت زمان ارائهٔ خدمت در هر دو قسمت، نمایی با میانگین ۲ دقیقه است. در هر لحظه، به‌طور متوسط چند نفر در رستوران و چند نفر در چایخوری هستند (بعد از دریافت غذا یا چای مشتریها به فضای خارج رستوران و چایخوری می‌روند.) به‌طور متوسط یك مشتری چه‌مدت در این هتل است؟ اگر کسی بخواهد به هر دو قسمت مراجعه کند، به‌طور متوسط چه‌مدت در هتل است؟

۲۹. خط تولید یك کارخانه از دو مرحله تشکیل شده‌است. کارهای سفارشی طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی سه واحد به کارخانه ارجاع می‌شود. در مرحلهٔ اول که ماشینکاری است، مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۱۵ دقیقه است. اما در مرحلهٔ دوم، هر دو قطعه، که از ماشینکاری خارج شده‌اند، به‌طور همزمان آبکاری می‌شوند. مدت‌زمان آبکاری نیز، نمایی با میانگین ۳۰ دقیقه است. (آبکاری یك قطعهٔ تنها، مقرون به‌صرفه نیست). به‌طور متوسط هر کار ارجاع‌شده چه‌مدت در کارخانه است؟

۳۰. یك شبکهٔ سری با دو ایستگاه خدمت را در نظر بگیرید، که ورود مشتریها براساس فرایند پواسون و مدت‌زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی با آهنگهای خدمت ۲۰ و ۱۰ (به‌ترتیب برای ایستگاههای ۱ و ۲) است. در هر ایستگاه یك خدمت‌دهنده مشغول به‌کار است. در لحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، ایستگاه دوم خالی است. در دو حالت زیر، احتمال اینکه این مشتری در ایستگاه دوم معطل بشود، چیست؟

الف. مشروط بر اینکه می‌دانیم در صف ایستگاه اول منتظر نمی‌ماند.

ب. مشروط بر اینکه می‌دانیم در صف ایستگاه اول منتظر می‌ماند (در این حالت ثابت کنید که احتمال اینکه این مشتری در صف ایستگاه دوم منتظر بماند، حداقل برابر با ۲/۳ است).

۳۱. در یك سیستم صف با یك خدمت‌دهنده، مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ $\lambda = ۲$ در ساعت وارد می‌شوند. مدت‌زمان خدمت، نمایی با میانگین ۶ دقیقه است. هر مشتری پس از دریافت خدمت با احتمال ۰٫۸ از سیستم خارج می‌شود، ولی با احتمال ۰٫۲ مجدداً وارد سیستم می‌شود و در انتهای صف منتظر می‌ماند. بنابراین، هر مشتری ممکن است چندبار خدمت دریافت کند.

الف. آیا این سیستم یك مدل $M/M/1$ است؟

ب. احتمال اینکه یك مشتری پنج بار خدمت دریافت کند، چیست؟ میانگین تعداد دفعاتی که یك مشتری خدمت دریافت می‌کند، چقدر است؟

ج. احتمال اینکه پنج مشتری در سیستم باشند، چیست؟ L را محاسبه کنید.

هـ. میانگین مدت‌زمان دریافت خدمت برای هر مشتری چقدر است؟

۳۲. در یك شرکت مهندسی مشاور، طراحی سیستمی از هشت مرحله تشکیل شده‌است. مدت‌زمان اجرای هر مرحله، نمایی با میانگین دو هفته است. تقاضا برای طراحی سیستمها طبق فرایند پواسون با میانگین هر ۲۰ هفته یك بار می‌رسد. در دو حالت زیر، مدت‌زمان انتظار هر کار (طراحی یك سیستم) چقدر طول می‌کشد؟ با چه مدلی تطبیق می‌کند؟

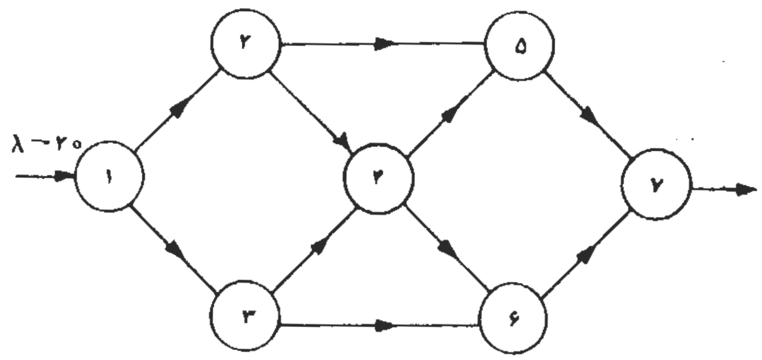
الف. یك مهندس، طراحی هر هشت مرحله را انجام می‌دهد.

ب. برای طراحی هر مرحله یك مهندس وجود دارد.

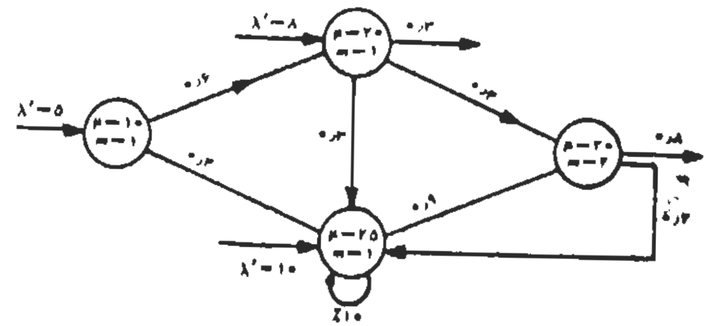
۳۳. یك مدل $M/M/1$ را در نظر بگیرید، که آهنگ ورود و خدمت در آن به‌ترتیب ۸ و ۱۲ باشد. تفاوت این مدل با $M/M/1$ این است که در این سیستم، علاوه بر مشتریهای عادی یك مشتری مخصوص نیز مراجعه می‌کند، که از اولویت با حق انقطاع برخوردار است. این مشتری پس از دریافت خدمت مدتی خارج از سیستم است و دوباره به سیستم مراجعه می‌کند. مدت‌زمان بودن این مشتری در خارج از سیستم، متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۵ است. آهنگ مراجعهٔ این مشتری را به‌دست آورید. یك مشتری عادی را در نظر بگیرید. تابع توزیع تعداد دفعات قطع خدمت این مشتری به‌علت آمدن مشتری مخصوص را تعیین کنید.

۳۴. یك شبکهٔ صف را در نظر بگیرید که ایستگاههای آن طبق شبکهٔ زیر است. ورود مشتریها فقط به ایستگاه یك و طبق فرایند پواسون است ($\lambda = ۲۰$). مدت‌زمان خدمت در هر ایستگاه، نمایی فرض می‌شود. آهنگ خدمت در ایستگاههای یك تا هفت به‌ترتیب، ۳۰، ۲۰، ۱۵، ۲۰، ۱۵، ۱۵ و ۳۰ است. در هر ایستگاه فقط یك خدمت‌دهنده مشغول به‌کار است. در هر ایستگاه که خروجیهای آن به دو ایستگاه دیگر وارد می‌شوند، فرض بر این است که هر مشتری با احتمال مساوی به یکی از آن دو ایستگاه مراجعه می‌کند. L و W را برای هر ایستگاه و کل سیستم به‌دست آورید. آیا هر ایستگاه یك مدل $M/M/1$ است؟

۱۰۷



۳۵. یك شبکهٔ صف را در نظر بگیرید، که ایستگاههای آن طبق شبکهٔ زیر است. ورود مشتریها از خارج سیستم به هر ایستگاه طبق فرایند پواسون و مدت زمان خدمت در هر ایستگاه نمایی فرض می‌شود. سایر اطلاعات موردنظر روی شبکه نشان داده شده‌است. L و W را برای هر ایستگاه و کل سیستم به‌دست آورید. آیا هر ایستگاه یك‌مدل $M/M/m$ است؟



۳۶. یك خط تولید ازدو ایستگاه‌پشت سرهم تشکیل شده‌است. قطعات، طبق فرایند پواسون با آهنگ ساعتی ۲۰ قطعه به‌ایستگاه اول می‌رسند. در هر ایستگاه، پس ازعملیاتی که روی هرقطعه انجام می‌شود، سه‌حالت می‌تواند اتفاق بیفتد. یاقطعه با استانداردها تطبیق می‌کند وسالم شناخته می‌شود، یا قطعه سالم شناخته نمی‌شود و مجدداً برای تعمیر به‌همان ایستگاه برگردانده می‌شود، یا غیرقابل اصلاح است و به‌عنوان ضایعات از خط تولیدکنار گذاشته می‌شود. مدت‌زمان کار روی هر قطعه، متغیر تصادفی نمایی است وزمان اجرای عملیات روی قطعه برای‌اولین‌بار، بازمان تعمیرات تفاوتی نمی‌کند. اطلاعات مربوط به‌ایستگاهها درجدول صفحهٔ‌بعد خلاصه‌شده‌است. میانگین تعداد قطعات داخل سیستم‌را به‌دست آورید.

ایستگاه	میانگین‌مدت‌اجرای‌عملیات (دقیقه)	درصدقطعات‌غیرقابل قبول‌ولی قابل‌اصلاح	درصدقطعات‌غیر قابل اصلاح
۱	۱٫۵	۳۰	۱۰
۲	۲	۲۰	۵

۸

سیستمهای صف غیرمارکوفی

دراین‌فصل، مدلهایی را موردبررسی قرارمی‌دهیم، که درآنها فقط یکی ازدومتغیر تصادفی زمان بین دو ورود متوالی مشتریها یا مدت زمان خدمت دارای تابع توزیع نمایی است. دراین مدلها، خاصیت بدون حافظه‌بودن سیستم دیگر برقرار نیست، زیرا متغیرهای فوق، نمایی نیستند. با وجود این، با استفاده ازخاصیت بدون حافظه بودن،همان متغیرتصادفی که دارای توزیع نمایی است، در مقاطعی از زمان سیستم می‌تواند دارای خاصیت مارکوفی باشد وهمین خاصیت مبنای تحلیل سیستم خواهد بود.

۱.۸ مدل $M/G/1$

براساس قراردادی که‌درفصل اول ارائه‌شده دراین مدل زمان بین دو ورود متوالی مشتریها نمایی است. اما، مدت‌زمان خدمت می‌تواند هرمتغیرتصادفی باتابع توزیع دلخواه باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را بـا $b(t)$ نشان می‌دهیم. در این مدل نیز، آهنگ ورود مشتری λ وآهنگ خدمت μ فرض می‌شود.

بیان مدل $M/G/1$ بشکل یك زنجیرهٔ مارکوفی

برای استفاده ازخاصیت مارکوفی، فرایندی احتمالی را کـه درآن حالت سیستم به‌شرح

زیر تعریف شده باشد، درنظرمی‌گیریم.

$X_n =$ تعداد مشتری درسیستم درهنگام خروج n امین مشتری

می‌خواهیم نشان دهیم که X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل‌می‌دهد. به‌طوری که‌مشاهده می‌شود، دراین سیستم هر مرحله، فاصلهٔ زمانی بین دو خروج متوالی مشتریها تعریف شده است. بدیهی است که مدت زمان واقعی هرمرحله ثابت نیست، بلکه متغیری تصادفی است، که‌تابع چگالی‌آن $b(t)$ فرض شده است. برای اینکه ثابت کنیم مجموعهٔ متغیرهای‌تصادفی X_n یك زنجیرهٔ مـارکوف تشکیل می‌دهد، بایـد نشان دهیم که X_{n+1} فقط به X_n بستگی دارد. این موضوع را ازرابطهٔ زیرمی‌توان استنتاج کرد:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 + A, & \text{باشد } X_n \geqslant 1 \text{ اگر} \\ A & \text{باشد } X_n = 0 \text{ اگر} \end{cases} \qquad (۱.۸)$$

که A عبارت ازتعداد مشتریهایی است که درطول مدت‌زمان ارائهٔ یك خدمت وارد سیستم می‌شوند. قسمت اول رابطهٔ فوق‌بدیهی است. برای روشن‌شدن قسمت دوم‌آن، فرض‌کنید که درلحظهٔ خروج n امین مشتری، در سیستم مشتری دیگری نباشد، یعنی $X_n = 0$. پس از مدتی، مشتری بعدی یعنی مشتری $(n+1)$ ام وارد می‌شود و بلافاصله شروع به دریافت خدمت می‌کند. اگر در مدت زمانی که این مشتری مشغول دریافت خدمت است، A مشتری جدید وارد شوند، بدیهی است که در زمان خروج او همین تعداد مشتری هنوز در سیستم هستند.

به‌این ترتیب، چون مجموعهٔ متغیرهـای تصادفی X_n، یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهد، لازم است که ماتریس گذار آن نیز مشخص شود. برای سهولت در نشان دادن این ماتریس، ازقرارداد زیر استفاه می‌شود:

$$q_n = P[A = n] \qquad (۲.۸)$$

به‌عبارت دیگر، احتمال اینکه در طول مدت ارائهٔ یك خدمت، n مشتری وارد شوند را با q_n نشان می‌دهیم.

حال با استفاده از رابطه‌های (۱.۸) و(۲.۸) می‌توان ماتریس گذار را بشکل‌زیرنشان‌داد.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ q_0 & q_1 & q_2 & q_3 & \cdots \\ 0 & q_0 & q_1 & q_2 & \cdots \\ 0 & 0 & q_0 & q_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \qquad (۳.۸)$$

۱۰۹

برای محاسبهٔ q_n، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. چنانچه S، مدت‌زمان ارائه‌خدمت، متغیر تصادفی پیوسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \int_0^\infty P(A=n|S=x)\,b(x)\,dx$$

از طرف دیگر

$$P(A=n|S=x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

در نتیجه

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\,b(x)\,dx \qquad (۴.۸)$$

با مشخص بودن $b(x)$، مقدار q_n، $(n = 0, 1, 2, \dots)$ محاسبه می‌شود.

اگر متغیر تصادفی مدت‌زمان خدمت گسسته باشد،

$$q_n = P(A=n) = \sum_s P(A=n|S=s)\,p_s = \sum_s e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^n}{n!}\,p_s \qquad (۵.۸)$$

محاسبهٔ معیارهای ارزیابی در مدل $M/G/1$

قضیهٔ ۱.۸ در یک مدل $M/G/1$، با فرض $\rho < 1$، معیارهای ارزیابی با استفاده از رابطهٔ زیر، که به‌نام رابطهٔ پلاچک خینکین[1] یا به‌طور اختصار $(P-K)$ موسوم است، محاسبه می‌شود

$$L_q = \frac{\rho^2 + \lambda^2 \mathrm{Var}(S)}{2(1-\rho)} \qquad (۶.۸)$$

که $\mathrm{Var}(S)$ معرف واریانس مدت‌زمان خدمت است. از طرف دیگر، میانگین مدت‌زمان خدمت $E(S) = 1/\mu$ است. بنابراین،

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda E(S) \qquad (۷.۸)$$

سایر معیارهای ارزیابی با استفاده از استنتاج لیتل به‌دست می‌آیند. برای نمونه

$$L = L_q + \rho$$

(همان‌طور که مشاهده می‌شود، برای تعیین معیارهای ارزیابی در مدل $M/G/1$، تنها اطلاعات موردنیاز، میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت است و نیازی به دانستن تابع

1. Pollaczek - Khintchine

توزیع خدمت نیست)

اثبات: براساس تعریف، L میانگین تعداد مشتریان در سیستم در درازمدت است؛ یعنی،

$$L = \lim_{n\to\infty} E(X_n) \qquad (۸.۸)$$

برای محاسبهٔ L، ابتدا رابطهٔ (۱.۸) را به‌شرح زیر بیان می‌کنیم:

$$X_{n+1} = X_n + A - Y \qquad (۹.۸)$$

که در عبارت فوق، Y متغیری تصادفی است، که به‌شرح زیر تعریف می‌شود:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{اگر } X_n > 0 \text{ باشد} \\ 0, & \text{اگر } X_n = 0 \text{ باشد} \end{cases} \qquad (۱۰.۸)$$

براساس این تعریف، رابطه‌های زیر نیز صدق می‌کند:

$$Y^2 = Y \qquad (۱۱.۸)$$

و

$$\lim_{n\to\infty} E(Y X_n) = L, \quad Y X_n = X_n \qquad (۱۲.۸)$$

آن گاه، میانگین طرفین رابطه (۹.۸) وسپس امید ریاضی مجذور طرفین همان رابطه را، درحالی که $n \to \infty$، به‌دست می‌آوریم.

$$E(X_{n+1}) = E(X_n) + E(A) - E(Y) \qquad (۱۳.۸)$$

$$E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2) + E(A^2) + E(Y^2) - 2E(YX_n) - 2E(AY) + 2E(AX_n) \qquad (۱۴.۸)$$

با توجه به اینکه متغیر تصادفی A مستقل از Y و X_n است و با درنظر گرفتن رابطهٔ (۸.۸)، داریم:

$$\lim_{n\to\infty} E(AX_n) = E(A)\cdot L \qquad (۱۵.۸)$$

و با استفاده از رابطه‌های (۱۲.۸)، (۱۴.۸) و (۱۵.۸)، در درازمدت، نتیجه می‌شود که:

$$E(A^2) + E(Y^2) - 2L - 2E(A)E(Y) + 2E(A)L = 0 \qquad (۱۶.۸)$$

(در عبارت فوق، رابطهٔ $E(X_{n+1}^2) = E(X_n^2)$، در درازمدت، به‌کار گرفته شده‌است).

برای به‌دست آوردن L از رابطهٔ فوق، لازم است که میانگین و گشتاور دوم متغیرهای Y و A محاسبه شود.

$$E(A)=\int_0^\infty E(A|S=x)\,b(x)\,dx \qquad (۱۷.۸)$$

اما چون ورود مشتریها طبق فرایند پواسون است، بنابراین:

$$E(A|S=x)=\lambda x \qquad (۱۸.۸)$$

درنتیجه

$$E(A)=\lambda\int_0^\infty x\,b(x)\,dx=\lambda E(S) \qquad (۱۹.۸)$$

دررابطهٔ فوق، مقدار انتگرال، بر اساس تعریف میانگین برابر $E(S)$ است. از طرفی براساس تعریف آهنگ خدمت‌دهی، داریم

$$E(S)=\frac{1}{\mu} \qquad (۲۰.۸)$$

و

$$E(A)=\frac{\lambda}{\mu}=\rho \qquad (۲۱.۸)$$

ازطرف دیگر، با استفاده ازرابطه‌های (۱۱.۸) و (۱۳.۸) و (۲۱.۸) خواهیم داشت.

$$E(Y)=E(Y^2)=E(A)=\rho \qquad (۲۲.۸)$$

برای محاسبهٔ L ازرابطهٔ (۱۶.۸)، تنها چیزی‌که باقی می‌ماند محاسبهٔ $E(A^2)$ است، که برای این کار، ازرابطهٔ واریانس وهمچنین (۲۱.۸) استفاده می‌کنیم.

$$\mathrm{Var}(A)=E(A^2)-(E(A))^2$$

یا

$$E(A^2)=\mathrm{Var}(A)+\rho^2=\rho+\lambda^2\,\mathrm{Var}(S)+\rho^2 \qquad (۲۳.۸)$$

باجایگزینی عبارات مربوطه در (۱۶.۸) رابطهٔ $P-K$ ثابت می‌شود.

حالت خاص $M/M/1$

دراین حالت

$$\mathrm{Var}(S)=\frac{1}{\mu^2}$$

دراین حالت طبق رابطهٔ $(P-K)$،

$$L=\rho+\frac{\rho^2+(\lambda/\mu)^2}{2(1-\rho)}=\rho+\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\rho}{1-\rho}$$

که همان نتیجه به‌دست‌آمده درمدل $M/M/1$ است.

مثال ۱.۸ در یک سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون وارد می‌شوند. فاصلهٔ زمانی بین‌دو ورود مشتریها به‌طور متوسط ۴۵ دقیقه است. مدت‌زمان خدمت متغیری تصادفی است که هیستوگرام آن به‌شرح زیرخلاصه می‌شود.

مدت‌زمان خدمت (دقیقه)	۱۰	۱۵	۲۰	۳۵	۴۰	۴۵	۵۰
درصد (p_i)	۵	۱۰	۲۰	۲۵	۲۰	۱۰	۱۰

معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه‌کنید

حل:

$$\frac{1}{\mu}=E(S)=۳۲٫۲۵ \text{ دقیقه}$$

$$E(S^2)=۱۱۸۶٫۲۵ \qquad (min)^2$$

$$\mathrm{Var}(S)=E(S^2)-[E(S)]^2=۱۴۶٫۱۸۷۸$$

$$\lambda=\frac{1}{۴۵}$$

$$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\frac{۳۲٫۲۵}{۴۵}$$

طبق رابطهٔ $(P-K)$

$$L_q=۱٫۰۳۴$$

و

$$L=L_q+\rho=۱٫۷۵$$

احتمالات حدی درمورد $M/G/1$

اگر π_n معرف وجود n مشتری در لحظهٔ خروج یک مشتری باشد، بـا توجه به‌اینکه سیستم

یکپارچه و همهٔ حالتها برگشت‌پذیر مثبت با دورهٔ یک هستند، طبق قضیهٔ احتمالات حدی زنجیره‌ای مارکوف، خواهیم داشت:

$$\pi_n = q_n\pi_0 + \sum_{i=1}^{n+1} q_{(n-i+1)}\pi_i, \quad n=0,1,2,\ldots \qquad (۲۴.۸)$$

و

$$\sum_{i=0}^{\infty}\pi_i = 1$$

پس از حل دستگاه معادلات فوق و با درنظر گرفتن $\pi_0 = 1-\rho$، مقادیر π_n ($n=1,2,\ldots$) به‌دست می‌آید. ضمناً می‌توان نشان داد که تبدیل z مقادیر π_n عبارت است از:

$$\pi(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z)-z} \qquad (۲۵.۸)$$

که $Q(z)$ تبدیل z کمیتهای q_n است؛ یعنی،

$$Q(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n q_n \qquad (۲۶.۸)$$

بنابراین، پس ازمحاسبهٔ q_n، ابتدا $Q(z)$ وسپس $\pi(z)$ را محاسبه می‌کنیم. آن‌گاه از $\pi(z)$ مقادیر π_n، ($n=0,1,2,\ldots$) به‌دست می‌آید.

توجه: باید توجه داشت که اگرچه ماتریس‌گذار زنجیرهٔ مارکوف فقط برای زمانهای خروج مشتریها تعریف شده‌است، ودرنتیجه π_n و معیارهای ارزیابی فقط برای همین لحظات به دست آمده است، ثابت می‌شود که دراین مدل π_n و سایر معیارهای ارزیابی برای لحظات دیگر نیزمعتبراست.

مثال ۲.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً در نظر بگیرید. اگر S مدت‌زمان خدمت باشد، طبق رابطهٔ (۵.۸)

$$q_n = P(A=n) = \sum_s e^{-\lambda s}\frac{(\lambda S)^n}{n!}p_s$$

بنابراین، با توجه به‌اینکه $\lambda = 1/25$ است

$$q_0 = 0.5075,\quad q_1=0.3256,\quad q_2=0.1236,\ldots$$

ازطرف دیگر

$$\pi_0 = 1-\rho = 1 - \frac{32.25}{45} = 0.283$$

با استفاده ازرابطه‌های (۲۴.۸)

$$\pi_0 = q_0\pi_0 + q_0\pi_1$$
$$\pi_1 = q_1\pi_0 + q_1\pi_1 + q_0\pi_2$$

درنتیجه

$$\pi_1 = 0.275,\quad \pi_2=0.184,\quad \pi_3=0.106$$

مثال ۳.۸ یک‌مدل $M/M/1$ را درنظر بگیرید. این‌مدل حالت‌خاصی از $M/G/1$ است، که تابع‌توزیع مدت‌زمان خدمت آن دارای توزیع‌نمایی است، یعنی،

$$b(t) = \mu e^{-\mu t}$$

طبق رابطهٔ (۳.۸)

$$q_n = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^n}{n!}\mu e^{-\mu x}dx = \frac{\mu}{n!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}(\lambda x)^n dx$$

وطبق رابطهٔ (۲۶.۸)،

$$Q(z) = \sum_{n=0}^\infty q_n z^n = \mu\sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}(\lambda x)^n dx$$

$$=\mu\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x}\sum_{n=0}^\infty\frac{(\lambda x z)^n}{n!}dx = \mu\int e^{-(\lambda+\mu)x}e^{\lambda z x}dx = \frac{\mu}{\lambda+\mu-\lambda z}$$

وطبق رابطهٔ (۲۵.۸)

$$\pi(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)Q(z)}{Q(z)-z} = \frac{\mu-\lambda}{\mu-\lambda z}=\frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

برطبق آنچه‌که‌درمورد تبدیل z گفته‌شد، تبدیل z مجموعهٔ ρ^n، ($n=0,1,2$) مساوی‌است با $1/(1-\rho z)$. درنتیجه،

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n,\qquad n=0,1,2,\ldots$$

دورهٔ اشتغال و بیکاری درمدل $M/G/1$

دراین مدل نیزچون ورود مشتریها براساس فرایندپواسون است، مدت‌زمان بیکاری سیستم دارای توزیع‌نمایی (با پارامتر λ) است، لذا

$$E(I)=\frac{1}{\lambda} \qquad (27.8)$$

ازطرف دیگر، دراین مدل نیز $\pi_0 = 1 - \rho$ است. بدین‌ترتیب، دررابطهٔ (۲۴.۵) پس از جایگزینی π_0 و $E(I)$ نتیجه می‌شود، که

$$E(b)=\frac{1}{\mu-\lambda}=\frac{E(S)}{1-\lambda E(S)} \qquad (28.8)$$

ومیانگین تعداد مشتریانی که دریك دورهٔ اشتغال به‌آنها خدمت ارائه می‌شود، برابر است با

$$E(N_b)=\mu E(b)=\frac{1}{1-\lambda E(S)} \qquad (29.8)$$

نظم اولویت درمدل $M/G/1$

یك مدل $M/G/1$ را درنظر بگیرید، که N گروه مشتری با اولویتهای مختلف (و بدون حق انقطاع) داشته باشد. مدت‌زمان خدمت این‌گروهها با یکدیگر متفاوت است. فرض کنید S_i مدت خدمت مشتری گروه i باشد. دراین صورت میانگین مدت‌زمان انتظار هرمشتری درگروه i ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (گروه ۱ بالاترین اولویت را دارد)

$$W_{q1}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2[1-\lambda_1 E(S_1)]} \qquad (30.8)$$

$$W_{qi}=\frac{\sum_{j=1}^{N}\lambda_j E(S_j^2)}{2\left[1-\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_j E(S_j)\right]\left[1-\sum_{j=1}^{i}\lambda_j E(S_j)\right]} \qquad (31.8)$$

$\frac{2}{\mu_1^2}$

باید توجه داشت که درحالت خاص $M/M/1$، که $E(S_1)=1/\mu_1$ و $E(S_1^2)=2/\mu_1^2$ است، ازرابطه‌های فوق نتایجی به‌دست می‌آید که قبلا برای $M/M/1$ ارائه شد.

روش اثبات رابطه‌های فوق یك مشتری گروه یك را، که بالاترین اولویت رادارد، درنظر بگیرید. اگر در زمان ورود او یك مشتری از گروه پایینتر، درحال دریافت خدمت باشد، تا زمان خروج او این مشتری باید صبر کند و ازآن پس می‌توان تصور کرد که در سیستم فقط مشتری گروه ۱ وجود دارد. بنابراین، میانگین مدت‌زمان انتظار او عبارت است ازمجموع زمان مورد نیاز برای دریافت خدمت مشتریی که درزمان ورود او مشغول دریافت خدمت است به‌اضافهٔ مجموع زمان لازم برای خروج مشتریهای هم گروه خود او. همین استدلال درمورد

همهٔ گروههای دیگر نیز صدق می‌کند (به‌مسئله شمارهٔ ۱۱ همین بخش مراجعه‌شود).

مثال ۴.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید دونوع مشتری به این سیستم مراجعه می‌کنند. مدت‌زمان خدمت، که درمثال ۱.۸ ارائه شده‌است، فقط مختص مشتریهای دارای اولویت بالاست، که ۳۰٪ کل مراجعین را تشکیل می‌دهند. مدت‌زمان دریافت خدمت هفتاد درصد مشتریها، که از اولویت پایینتری برخوردارند، ثابت و برابر با نیم‌ساعت‌است. میانگین مدت‌زمان انتظارهر گروه ازمشتریها را محاسبه کنید.

حل: دراین مدل داریم:

$$\lambda_1=\frac{0.3}{45} \qquad \lambda_2=\frac{0.7}{45}$$

$$E(S_1)=32.25 \qquad E(S_1^2)=1186.25$$

$$E(S_2)=30 \qquad E(S_2^2)=900$$

درنتیجه، ازرابطهٔ (۳۰.۸)

$$W_{q1}=13.95 \text{ دقیقه}$$

$$W_{q2}=43.83 \text{ دقیقه}$$

ومیانگین کل سیستم

$$W_q=\frac{\lambda_1}{\lambda}W_{q1}+\frac{\lambda_2}{\lambda}W_{q2}=34.77 \text{ دقیقه}$$

۲.۸ مدل $M/G/1$ با ورود گروهی

دراین مدل نیز، فرض می‌شود که زمان بین دو ورود متوالی مشتریها دارای توزیع نمایی، با پارامتر λ است؛ لیکن، هربار به‌جای یك مشتری، گروهی مشتری وارد می‌شوند. احتمال اینکه هرگروه از j مشتری تشکیل شده باشد را با p_j نشان می‌دهیم. بنابراین $\lambda_j=\lambda p_j$، معرف میانگین تعداد گروههای متشکل از j مشتری است، که درواحد زمان واردمی‌شوند. اگر N تعداد مشتریهای یك گروه باشد،

$$E(N)=\sum_{j=1}^{\infty} j\,p_j$$

دراین مدل، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$L_q = \frac{\rho^2 + [\lambda E(N)]^2 \operatorname{Var}(S)}{2(1-\rho)} + \frac{\rho\left[\dfrac{E(N^2)}{E(N)} - 1\right]}{2(1-\rho)} \qquad (۳۲.۸)$$

یادآوری می‌کنیم که در رابطهٔ فوق، آهنگ ورود مشتری $\lambda E(N)$ و

$$\rho = \frac{\lambda E(N)}{\mu} = \lambda E(N)\, E(S)$$

است. درحالت خاصی که تعداد مشتری در هر گروه، ۱ نفر باشد، جملهٔ دوم حذف می‌شود؛ زیرا $E(N^2) = E(N) = 1$ است.

مثال ۵.۸ مثال ۱.۸ را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که زمان بین دو ورود گروهی به‌طور متوسط یک‌ساعت وربع و هر گروه با احتمال ۵۰ درصد یک‌مشتری، با احتمال ۲۵ درصد دومشتری و با احتمال ۲۵ درصد سه‌مشتری دارد. میانگین طول صف را محاسبه کنید.

حل:

$$E(N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(2) + \frac{1}{4}(3) = \frac{7}{4}, \quad \lambda = \frac{1}{75}$$

$$E(N^2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(4) + \frac{1}{4}(9) = \frac{15}{4}$$

$$\rho = \lambda E(N)\, E(S) = 0.7525$$

وطبق رابطهٔ (۳۲.۸)،

$$L_q = 3.04$$

۳.۸ مدل $M/G/m$

دراین مدل ورود مشتریها طبق فرایند پواسون با آهنگ λ، مدت زمان خدمت متغیری تصادفی دلخواه با تابع چگالی $b(t)$ است و سیستم دارای m خدمت‌دهنده است.

درمدل $M/G/m$، میانگین طول صف ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید

$$L_q = \frac{r^{m-1}[\lambda^2 \operatorname{Var}(S) + r^2]}{2(m-1)!\,(m-r)^2\left[\sum_{j=0}^{m-1}\dfrac{r^j}{j!} + \dfrac{r^m}{(m-1)!\,(m-r)}\right]} \qquad (۳۳.۸)$$

که $r = \lambda/\mu = \lambda E(S)$ است.

درحالت خاص، که $m = 1$ باشد، رابطهٔ فوق به‌رابطهٔ $(P-K)$ تبدیل می‌شود.

۴.۸ مدل $G/M/1$

دراین مدل، مدت‌زمان خدمت دارای توزیع‌نمایی فرض می‌شود. لیکن، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری تصادفی است، که می‌تواند هرنوع تابع توزیع دلخواهی را داشته باشد. تابع چگالی این متغیر تصادفی را با $a(t)$ بیان می‌کنیم. با توجه به تعریف آهنگ ورود مشتری (λ) و با درنظر گرفتن اینکه میانگین زمان بین دو ورود متوالی برابر با $1/\lambda$ است، می‌توان λ را برحسب $a(t)$ به‌شرح زیر بیان کرد:

$$\frac{1}{\lambda} = \int_0^{\infty} t\, a(t)\, dt$$

درحالتی که‌زمان بین دوورود متوالی‌مشتریها متغیر تصادفی گسسته‌باشد وفقط مقادیرمشخص $t_1, t_2, \ldots$ را با احتمالات $P_1, P_2, \ldots$ انتخاب کند، λ ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty} t_i\, p_i$$

بیان مدل $G/M/1$ برحسب زنجیرهٔ مارکوف

حالت سیستم را به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$X_n =$ تعداد مشتری درسیستم درلحظهٔ ورود مشتری nام

متغیرهای تصادفی X_n یك زنجیرهٔ مارکوف تشکیل می‌دهند؛ زیرا X_{n+1}، فقط به X_n بستگی دارد. رابطهٔ زیر این موضوع را نشان می‌دهد

$$X_{n+1} = X_n + 1 - B \qquad (۳۴.۸)$$

که B معرف تعداد مشتریهایی است که‌درفاصلهٔ زمانی بین دوورود متوالی مشتریها خدمت دریافت‌می‌کنند. برای بیان ماتریس‌گذاراین زنجیرهٔ مارکوف، ابتدا مقادیر b_i را به‌ازای $i = 0, 1, 2, \ldots$ و به‌شرح زیرتعریف می‌کنیم:

$$b_i = P[B = i] \qquad (۳۵.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این زنجیرهٔ مارکوف به‌صورت زیر درمی‌آید

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1-b_0 & b_0 & 0 & \cdots \\ 1-b_0-b_1 & b_1 & b_0 & \cdots \\ \vdots & & & \\ 1-\sum_{i=0}^{n} b_i & b_n & b_{n-1} & \cdots \end{bmatrix} \qquad (۳۶.۸)$$

۱۱۴

برای روشن شدن اینکه ماتریس گذار فوق چگونه به‌دست آمده است، چندعنصر آن را به‌شرح زیرمحاسبه می‌کنیم. دراین محاسبات ازرابطهٔ (۳۴.۸) استفاده می‌شود.

$$p_{01} = P[X_{n+1}=1 \mid X_n = 0] = P[B=0] = b_0$$

$$p_{02} = P[X_{n+1}=2 \mid X_n=0] = P[B=-1]=0$$

$$p_{00} = P[X_{n+1}=0 \mid X_n=0] = P[B\geqslant 1] = 1-b_0$$

رابطهٔ آخر، مربوط به محاسبهٔ P_{00} (وهمچنین سایر مقادیر P_{i0}) بامحاسبهٔ عناصردیگر ماتریس متفاوت است. دررابطهٔ فوق، فرض می‌شود که درلحظهٔ ورود یك مشتری مشخص، سیستم خالی باشد. بنابراین، بلافاصله خدمت به‌او شروع می‌شود. احتمال اینکه درلحظهٔ ورود مشتری بعدی سیستم بازهم خالی باشد، این است که ارائهٔ خدمت به‌مشتری موردنظر تمام شده باشد؛ لیکن، باید توجه داشت که بعد از رفتن این مشتری وقبل ازورود مشتری بعدی خدمت‌دهنده مدتی بیکارمی‌ماند. بنابراین، اگرچه دراین فاصله فقط به‌یك مشتری خدمت ارائه شده است، امکان ارائهٔ خدمت به‌بیش ازیك مشتری وجود داشته است. به‌این ترتیب، P_{00} معادل است با اینکه در فاصلهٔ بین دو ورود متوالی مشتریها حداقل به‌یك مشتری خدمت داده‌شود.

برای به‌دست آوردن مقادیر b_i ازرابطهٔ زیراستفاده می‌شود:

$$b_i = \int_0^\infty e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^i}{i!}a(t)\,dt \qquad (۳۷.۸)$$

احتمالات حدی درمدل $G/M/1$

درزنجیرهٔ مارکوفی که تشریح شد، تعداد مشتریهای داخل سیستم درلحظهٔ ورود را حالت سیستم تعریف کردیم. باتوجه به‌اینکه زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیر تصادفی بدون حافظه نیست، احتمالات مربوط به‌تعداد مشتریها درسیستم درلحظات مختلف متفاوت است. اگر π_i، طبق معمول معرف بودن i مشتری درسیستم دریك لحظه‌دلخواه و P_i معرف احتمال بودن i مشتری درسیستم، درلحظهٔ یك ورود باشد، π_i و P_i لزوماً یکی نیستند. در زنجیرهٔ مارکوف موردبحث، فقط امکان به‌دست آوردن احتمالات حدی P_i وجود دارد. بنابراین، ابتدا معیارهای ارزیابی را فقط برای لحظه‌های ورود حساب می‌کنیم وآن‌گاه به‌معیارهای ارزیابی درحالت کلی می‌پردازیم.

باتوجه به‌اینکه این زنجیرهٔ مارکوف یکپارچه وتمام حالتهای آن برگشت‌پذیرمثبت و نادوره‌ای هستند، با استفاده ازقضیهٔ احتمالات‌حدی، معادلات تعادلی درمدل $G/M/1$ به‌شرح زیرخواهد بود.

$$P_0 = \sum_{i=0}^{\infty} P_i\left[1-\sum_{k=0}^{i} b_k\right] \qquad (۳۸.۸)$$

$$P_n = \sum_{i=n-1}^{\infty} P_i b_{i-n+1}, \quad n=1,2,\ldots \qquad (۳۹.۸)$$

و

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1 \qquad (۴۰.۸)$$

همان طور که درمبحث زنجیره‌های مارکوف گفتیم، یکی ازمعادلات فوق زائد محسوب می‌شود ولذا برای حل این دستگاه نیازی به‌معادلهٔ شمارهٔ (۳۸.۸) نیست.

مثال ۶.۸ یك‌مدل $G/M/1$ را درنظر بگیرید، که درآن زمان بین دو ورود متوالی مشتریها ثابت وبرابر با ۱۵ دقیقه ومدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۱۰ دقیقه است. این مدل از نوع $D/M/1$ است، که درآن $\lambda = 4$ و $\mu = 6$ و $\rho = 2/3$ است. این مدل را به‌صورت یك زنجیرهٔ مارکوف نشان دهید.

حل: ابتدا مقادیر b_n را به‌ازای $n=0,1,2,\ldots$ وبا توجه به‌ثابت بودن زمان بین دو ورود محاسبه‌می‌کنیم.

$$b_n = P(B=n) = e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!} = \frac{e^{-1.5}(1.5)^n}{n!} \qquad (۴۱.۸)$$

بنابراین، ماتریس‌گذار این مدل به‌شرح زیرخواهد بود:

$$p_{i,j} = \begin{cases} P[B=i+1-j] = e^{-1.5}\dfrac{(1.5)^{i+1-j}}{(i-j+1)!}, & 1\leqslant j\leqslant i+1\\ 1-\sum_{k=0}^{i} P(B=k), & j=0 \\ 0, & i+2\leqslant j\end{cases}$$

برای نمونه

$$p_{01} = P[B=0] = e^{-1.5}$$

$$p_{52} = P[B=4] = e^{-1.5}\frac{(1.5)^4}{4!} = 0.047$$

$$p_{20} = 1-b_0-b_1-b_2 = 1-e^{-1.5}\left[1+1.5+\frac{(1.5)^2}{2}\right] = 0.191$$

قضیهٔ ۲۰۸ پس از حل دستگاه معادلات (۳۹۰۸) و (۴۰۰۸)، احتمالات حدی به‌شرح زیر به‌دست می‌آید:

$$P_n=(1-x_0)x_0^n \quad , \quad n=0,1,2,\dots \qquad (۴۲۰۸)$$

که x_0 عددی بین صفر و یک و جواب معادلهٔ مشخصهٔ زیر است.

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} x^n b_n \qquad (۴۳۰۸)$$

اثبات: به‌فرض اینکه معادلهٔ (۴۳۰۸) جوابی بین صفر و یک داشته باشد، باجایگزینی P_n ازرابطهٔ (۴۲۰۸) در رابطهٔ (۳۸۰۸)، صحت این قضیه نشان داده می‌شود.

مثال ۷۰۸ احتمالات حدی را درمثال ۶۰۸ به‌دست‌آورید.

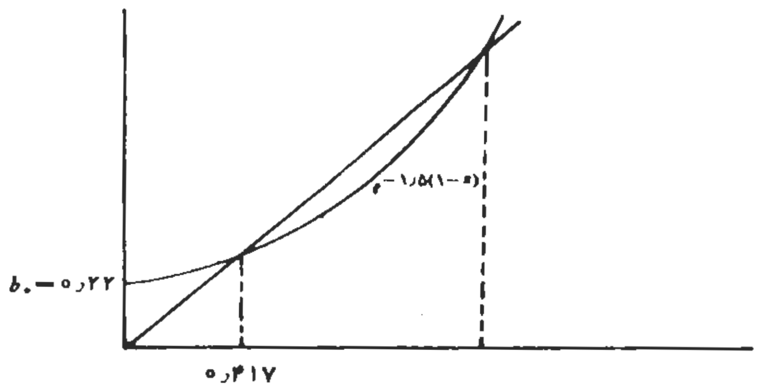
حل: برای حل معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳۰۸) از رابطهٔ (۴۱۰۸) استفاده می‌شود. درنتیجه

$$x=\sum_{n=0}^{\infty} x^n e^{-1.5}\frac{(1.5)^n}{n!}=e^{-1.5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1.5x)^n}{n!}$$

یا

$$x=e^{-1.5(1-x)}$$

برای حل این معادلهٔ مشخصه از روش ترسیمی استفاده می‌شود. از یک طرف، معادلهٔ $y_1=e^{-1.5(1-x)}$ و از طرف دیگر تابع $y_2=x$، که نیمساز محورهای مختصات است، رسم می‌شود. محل تلاقی آنها به‌ازای $x_0=0.417$ جواب موردنظر درمعادلهٔ مشخصه است. درنتیجه



شکل ۱۰۸ روش ترسیمی برای حل معادلهٔ مشخصهٔ مثال ۷۰۸

$$P_0=(1-x_0)=0.583$$
$$P_n=(0.583)(0.417)^n$$

قضیهٔ ۳۰۸ معادلهٔ مشخصهٔ (۴۳۰۸) معادل رابطهٔ زیر است:

$$x=\int_0^\infty e^{-\mu t(1-x)}a(t)\,dt \qquad (۴۴۰۸)$$

واگر زمان بین دوورود مشتریها متغیر تصادفی گسسته باشد، معادلهٔ مشخصه به‌صورت زیر درمی‌آید: $e^{-\mu t(1-x)}$

$$x=\sum_t e^{-\mu t(1-x)}P(T=t) \qquad (۴۵۰۸)$$

که T، معرف زمان بین دو ورود مشتریهاست، که مقادیر گسستهٔ t را انتخاب می‌کند.

اثبات: اگر درمعادلهٔ‌مشخصه(۴۳۰۸)، به‌جای b_n مقدار آن‌ازرابطهٔ(۳۷۰۷) جایگزین شود،

$$x=\sum_{n=0}^\infty x^n\int_0^\infty e^{-\mu t}\frac{(\mu t)^n}{n!}\,a(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-\mu t}a(t)\sum_{n=0}^\infty\frac{(\mu t x)^n}{n!}\,dt$$

چون رابطهٔ $\sum\frac{(\mu t x)^n}{n!}=e^{\mu t x}$ برقرار است. لذا پس‌از جایگزینی وانتگرالگیری، رابطهٔ (۴۴۰۸) به‌دست می‌آید. رابطهٔ (۴۵۰۸) نیز با روشی مشابه ثابت می‌شود

مثال ۸۰۸ معادلهٔ مشخصهٔ مثال (۶۰۸) را با استفاده ازقضیهٔ فوق به‌دست‌آورید.

حل: چون زمان بین دو ورود ثابت است، ازرابطهٔ (۴۵۰۸) استفاده می‌شود. در این مدل،

$$P\left(T=\frac{1}{2}\right)=1$$

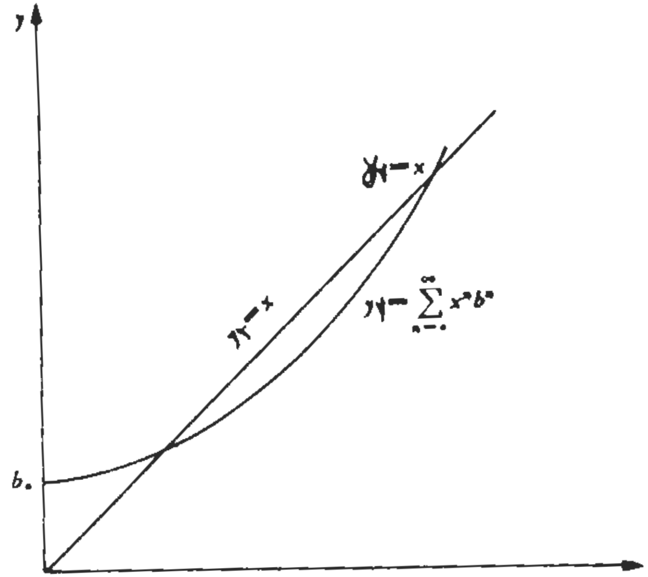
و درنتیجه

$$x=e^{-1.5(1-x)}$$

قضیهٔ ۴۰۸ درمدل $G/M/1$، اگر $\rho<1$ باشد، معادلهٔ‌مشخصهٔ (۴۳۰۸) فقط دارای یک جواب x_0 بین صفر و یک خواهد بود واگر $\rho\geqslant 1$ باشد، معادلهٔ مشخصهٔ مذکور در فاصلهٔ صفر تا یک هیچ جوابی نخواهد داشت.

اثبات: برای به دست آوردن جواب معادلهٔ مشخصه، دوطرف آن را جداگانه بر یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم. تابع $y_1=\sum_{n=0}^\infty x^n b_n$ محور y ها را در نقطهٔ b_0 قطع می‌کند. این تابع به‌ازای تمام مقادیر $x\geqslant 0$ افزاینده ومحدب است، زیرا مشتقهای اول و دوم آن مقادیری مثبت است. بنابراین، این تابع و تابع $y_2=x$ حداکثر

۱۱۷



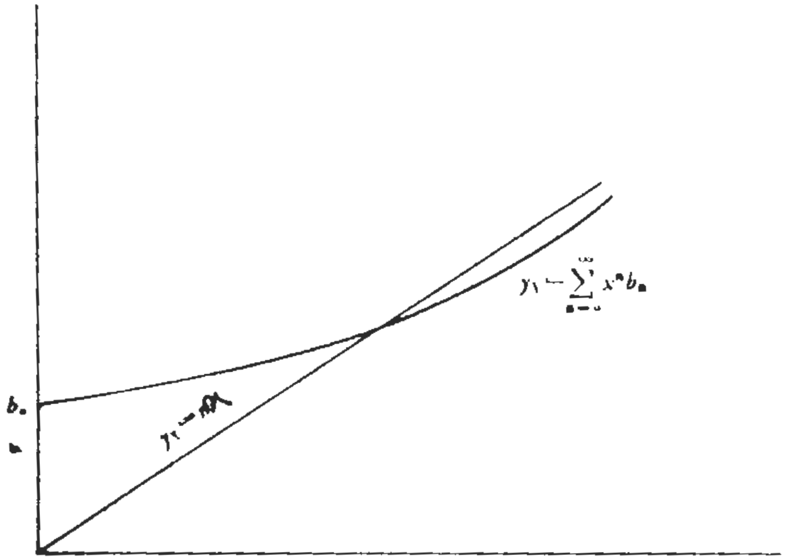
شکل ۲.۸ روش ترسیمی حل معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$

دردو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند. از طرف دیگر، بسادگی معلوم می‌شود، که یکی از نقاط تقاطع این دو تابع همواره درنقطهٔ $x = 1$ اتفاق می‌افتد. بنابراین، این‌دو تابع حداکثر در یك نقطهٔ دیگر با یکدیگر تلاقی دارند. دراین مورد، دوحالت اتفاق می‌افتد. درحالت اول، که درشکل ۲.۸ نشان داده شده است، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x = 1$ بزرگتر از یك است، که دراین‌صورت، دریك نقطه درفاصلهٔ صفر تایك، این دو منحنی یکدیگر را قطع می‌کنند. درحالت دوم، که درشکل ۳.۸ نشان داده شده‌است، دومنحنی درفاصلهٔ صفر تایك یکدیگررا قطع نمی‌کنند، زیرا، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x = 1$ حداکثر برابر با یك است.

ازطرف دیگر، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x = 1$ برابراست با:

$$\frac{dy_1}{dx}\bigg|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} b_n \bigg|_{x=1} = \sum_{n=0}^{\infty} n b_n$$

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، عبارت سمت راست معرف میانگین تعداد خدمتهایی است که درفاصلهٔ بین دو ورود ارائه می‌شود واین مقدار برابراست با λ/μ، زیرا میانگین تعداد موارد خدمت درواحد زمان μ ومیانگین مدت‌زمان بین دو ورود $1/\lambda$ است. بدین‌ترتیب، ضریب زاویهٔ تابع y_1 درنقطهٔ $x = 1$، برابر با $1/\rho$ است. و همان‌طورکه گفتیم،



شکل ۳.۸ معادلهٔ مشخصه درمدل $G/M/1$، در حالتی‌که $\rho \geq 1$ باشد.

اگر مانند شکل ۲.۸، ضریب زاویه، بزرگتر از یك یا $\rho < 1$ باشد، معادلهٔ مشخصه، یك جواب بین صفر و یك دارد؛ درغیر این صورت، دراین فاصله جوابی برای معادلهٔ مشخصه وجود نخواهد داشت.

مثال ۹.۸ احتمالات حدی مدل $M/M/1$ را با استفاده از نتایج مدل $G/M/1$ به‌دست آورید.

حل: با استفاده ازرابطهٔ (۲۲.۸) وبا درنظرگرفتن اینکه $a(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ است،

$$x = \int_0^{\infty} e^{-\mu t(1-x)} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + \mu - \mu x}$$

یا

$$\mu x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda = 0$$

ریشه‌های این‌معادله عبارت‌اند از:

$$x = 1 \text{ و } \rho$$

همان طورکه مشاهده می‌شود، یکی از ریشه‌ها همواره یك است. دراین مدل، اگر $\rho < 1$ باشد، ریشهٔ دیگر معادله $x_0 = \rho$، عددی بین صفر و یك است. اگر $\rho \geq 1$ باشد، سیستم

ناپایدار است. در حالت پایدار، احتمالات حدی برابر است با:

$$\pi_n = (1-x_0)x_0^n = (1-\rho)\rho^n$$

که با نتایج قبلی که در مدل $M/M/1$ به‌دست آمد، تطبیق می‌کند.

معیارهای ارزیابی در مدل $G/M/1$

تا اینجا نحوهٔ محاسبهٔ احتمالات حدی و به‌تبع آن معیارهای ارزیابی سیستم در لحظهٔ ورود به‌دست آمد. برای محاسبهٔ معیارهای ارزیابی در کل سیستم به‌شرح زیر عمل می‌کنند.

نحوهٔ محاسبهٔ W و W_q

یک مشتری را در نظر بگیرید. مدت زمان انتظار این مشتری در صف بستگی به تعداد مشتریهایی دارد که در لحظهٔ ورود این مشتری در سیستم هستند. بنابراین، برای محاسبهٔ این معیار از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم.

$$W_q = E(T_q) = \sum_{n=0}^{\infty} E(T_q|N=n)P_n$$

اگر در لحظهٔ ورود این مشتری، تعداد مشتریهایی که در سیستم هستند، برابر با n باشد مدت‌زمان انتظار او در صف برابر با مجموع مدت‌زمان خدمت همهٔ مشتریهای قبل از اوست. از طرفی، میانگین مدت‌زمان خدمت هر مشتری برابر با $1/\mu$ است. لذا،

$$E(T_q|N=n) = \frac{n}{\mu}$$

در نتیجه

$$W_q = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{\mu}\cdot(1-x_0)x_0^n = \frac{(1-x_0)x_0}{\mu}\sum_{n=0}^{\infty} n x_0^{n-1}$$

با استفاده از نتیجهٔ سری $\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = 1/(1-x_0)^2$، خواهیم داشت:

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1-x_0)} \tag{46.8}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu(1-x_0)} \tag{47.8}$$

و با استفاده از استنتاج لیتل

$$L = \lambda W = \frac{\rho}{1-x_0} \tag{48.8}$$

$$L_q = \frac{\rho\cdot x_0}{1-x_0} \tag{49.8}$$

از طرف دیگر، در این مدل نیز شبیه سایر مدلهایی که یک خدمت‌دهنده دارند،

$$\pi_0 = 1-\rho$$

و می‌توان نشان داد که

$$\pi_n = \rho(1-x_0)x_0^{n-1}, \qquad n \geq 1 \tag{50.8}$$

مثال ۱۰.۸ معیارهای ارزیابی مدل $M/M/1$ را با استفاده از مدل $G/M/1$ به‌دست آورید.

حل: طبق نتیجهٔ مثال (۹.۸)، در مدل $M/M/1$، $x_0=\rho$ ریشهٔ معادلهٔ مشخصه، است (به‌شرط اینکه $\rho<1$ باشد). در نتیجه

$$\pi_n = (1-\rho)\rho^n$$

$$W = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

$$W_q = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$L = \frac{\rho}{1-\rho}$$

$$L_q = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

مثال ۱۱.۸ در یک مدل $G/M/1$، که مدت زمان خدمت دارای توزیع نمایی با میانگین ۸ دقیقه است، زمان بین دو ورود متوالی مشتریها متغیری گسسته است، که مقدار آن ۸ یا ۱۰ یا ۱۲ یا ۱۴ دقیقه با احتمالات، به ترتیب ۲ر۰، ۳ر۰، ۳ر۰ و ۱ر۰ است. معیارهای ارزیابی این مدل را محاسبه کنید.

حل: در این مدل، میانگین مدت‌زمان بین دو ورود برابر است با،

$$\frac{1}{\lambda} = (8)(0.2)+(10)(0.3)+(12)(0.3)+(14)(0.1) = 10 \text{ دقیقه}$$

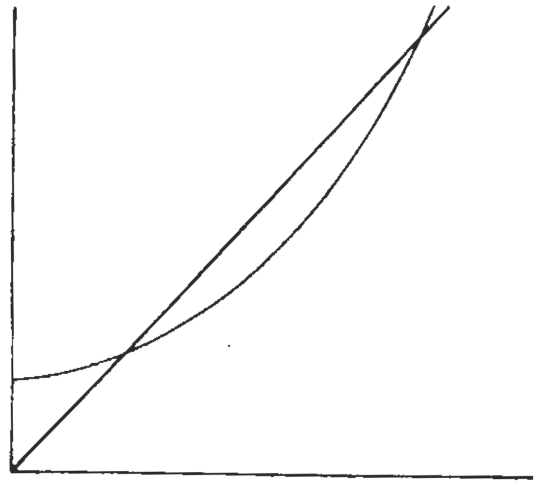
بنابراین، $\lambda = 1/10$ و $\mu = 1/8$ و $\rho = 0.8$ است.
معادلهٔ مشخصهٔ این مدل، طبق رابطهٔ (۲۵.۸) به‌صورت رابطهٔ زیر درمی‌آید:

$$x = 0.4e^{-(1-x)} + 0.3e^{-1.25(1-x)} + 0.2e^{-1.5(1-x)} + 0.1e^{-1.75(1-x)}$$

چون $\rho < 1$ است، طبق قضیهٔ (۳.۸) معادلهٔ مشخصهٔ فوق دارای یك جواب x_0 است، که مقدار آن عددی بین صفر ویك است. برای محاسبهٔ x_0، جدول زیر را تهیه می‌کنیم:

x	مقدار سمت راست معادلهٔ مشخصه
۰	۰٫۲۹۵
۰٫۲	۰٫۳۷۵
۰٫۴	۰٫۴۷۷
۰٫۶	۰٫۶۰۹
۰٫۸	۰٫۷۸
۱	۱

درشکل ۴.۸، دو طرف معادلهٔ مشخصه با استفاده ازنتایج جدول فوق رسم شده است. جواب حاصل $x_0 = 0.62$ است.



شکل ۴.۸ روش ترسیمی برای حل مثال ۱۱.۸

درنتیجه،

$$\pi_0 = 1 - \rho = 0.2$$

$$\pi_n = \rho(1 - x_0)x_0^{n-1} = 0.288(0.62)^{n-1}, \quad n \geq 1$$

$$W = \frac{1}{\mu(1 - x_0)} = 22.22 \text{ دقیقه}$$

$$W_q = \frac{x_0}{\mu(1 - x_0)} = 12.22 \text{ دقیقه}$$

$$L = \frac{\rho}{1 - x_0} = 2.22$$

$$L_q = \frac{\rho x_0}{1 - x_0} = 1.22$$

می‌توان L را ازرابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi_n = 0.288\sum_{n=1}^{\infty} n\, 0.62^{n-1} = \frac{0.288}{(1 - 0.62)^2} = 2.22$$

مسائل

۱. به‌بخش تزریقات یك درمانگاه، که فقط یك مأمور دارد، هر ساعت به‌طور متوسط ۱۵ نفر مریض مراجعه‌می‌کنند. ورود این مریضها طبق فرایند پواسون است. مدت‌زمان تزریق، متغیر تصادفی یکنواخت و بین سه تا ۶ دقیقه است. به‌طور متوسط درهر لحظه چند نفر مریض دراین بخش هستند؟ به‌طورمتوسط یك مریض چه مدت دراین درمانگاه وقت صرف می‌کند؟

۲. درمسئلهٔ ۱، اگر مدت‌زمان انجام تزریقات ثابت و برابر با ۴٫۵ باشد، به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید

۳. مسئلهٔ ۱ را مجدداً درنظر بگیرید. فرض کنید که مریضها برای دریافت یکی ازچهارنوع خدمت مراجعه‌می‌کنند. مدت‌زمان ارائهٔ هرخدمت ثابت وطبق جدول زیراست. به‌سؤالات مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

۱۱۹

نوع خدمت	مدت‌زمان (دقیقه)	درصد مشتریهای متقاضی این نوع خدمت
۱	۳	۲۰
۲	۴	۳۰
۳	۵	۳۰
۴	۶	۲۰

۴. درمسائل ۱ و ۳، واریانس تعداد بیماران درمانگاه را محاسبه کنید.

۵. دریك مرکز کنترل کیفیت، تعداد قطعاتی که برای بازرسی می‌رسند، طبق فرایند پواسون است (به‌طور متوسط هر ۱۲ دقیقه یك قطعه). مدت زمان بازرسی، متغیر تصادفی و نرمال با میانگین ۸ دقیقه و واریانس ۳۲ (دقیقه)^2 است. چنانچه به‌جای بازرس فعلی یك ماشین اتوماتیك قراردهیم، مدت‌زمان بازرسی قطعی (غیراحتمالی) خواهد شد. مدت‌زمان بازرسی توسط این ماشین باید چقدر باشد تامیانگین تعداد قطعاتی که درمرکز کنترل کیفیت‌هستند، تغییر نکند؟

۶. دریك سیستم صف، مشتریها طبق فرایند پواسون با پارامتر ۱۰ مشتری در ساعت وارد می‌شوند، مدت‌زمان خدمت، طبق توزیع یکنواخت، بین ۳ تا ۵ دقیقه است.

الف. احتمال خالی بودن سیستم چیست؟

ب. میانگین مدت‌زمان انتظار مشتری درسیستم چیست؟

ج. اگرمدت‌زمان خدمت ثابت باشد، مقدار آن چقدر باید باشد تاجواب بند ب تغییری نکند

۷. دریك سیستم صف، ورود مشتریها براساس فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۹ مشتری است. نتایج زمان‌سنجی درمورد مدت زمان خدمت (برحسب دقیقه) به‌شرح زیر است.
۸٫۳، ۵٫۹، ۱٫۸، ۶٫۳، ۲٫۵، ۱۰٫۲، ۷٫۸، ۵٫۵، ۲٫۲، ۷٫۱، ۶٫۲، ۳٫۹، ۴٫۲، ۷٫۳، ۷٫۲، ۹٫۵، ۴٫۸، ۵٫۲، ۶، ۵٫۵، ۴٫۸، ۳٫۵، ۸٫۴، ۱۰٫۳، ۶٫۱، ۴٫۸، ۵، ۲٫۹، ۵٫۱، ۴٫۵

معیارهای ارزیابی این سیستم را محاسبه کنید.

۸. به یك سیستم صف، هرساعت به‌طورمتوسط ده مشتری طبق فرایند پواسون واردمی‌شوند. این سیستم فقط یك خدمت‌دهنده دارد، لیکن مشتریها متقاضی دونوع خدمت هستند. ۸۰درصد مشتریها متقاضی خدمت نوع ۱ و ۲۰ درصد بقیه متقاضی خدمت نوع دوهستند. مدت‌زمان هردو خدمت، نمایی با میانگینهای به‌ترتیب ۲ و ۴ دقیقه است.

الف. میانگین و واریانس مدت‌زمان خدمت را در کل سیستم تعیین کنید

ب. میانگین طول صف را محاسبه کنید.

ج. چنانچه ظرفیت صف حداکثر سه‌باشد، نمودار آهنگ‌را رسم کنید. دراین‌حالت احتمال اینکه از ورود یك مشتری جلوگیری شود، چیست؟

د. دربند «ج»، احتمال اینکه یك مشتری که وارد سیستم شده است، بتواند بلافاصله خدمت دریافت کند، چیست؟

۹. به یك ایستگاه تولید، هر۵٫۸ دقیقه یك‌بار، قطعه‌ای می‌رسد. این مدت زمان قطعی (غیراحتمالی) است. مدت‌زمان کار روی هرقطعه دراین ایستگاه، نمایی با میانگین ۶دقیقه است. میانگین تعداد قطعات دراین ایستگاه در دوحالت زیرچقدر است؟

الف. لحظهٔ ورود یك قطعهٔ جدید

ب. دریك لحظهٔ مشخص

۱۰. یك مدل $M/G/1/2$، که آهنگ ورود مشتریها به آن‌درهرساعت برابر ۳ است، را درنظر بگیرید. مدت‌زمان خدمت، ثابت و برابر با ۱۵دقیقه است. این مدل را به‌یك زنجیرهٔ مارکوف (گسسته) تبدیل و ماتریس گذار آن‌را بنویسید. احتمالات حدی این ماتریس را به‌دست آورید. این احتمالات حدی را بااحتمالات حدی مدل $M/G/1$، با همان آهنگ ورود و آهنگ خدمت مقایسه کنید.

مشغول به کار

۱۱. یك لحظهٔ‌مشخص را درنظربگیرید، که یك مشتری وارد یك سیستم $M/G/1$ می‌شود. نشان دهید که میانگین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا اولین مشتری خارج شود، برابر با $(\lambda/2)E(S^2)$ است، که در آن λ آهنگ ورود مشتری و S که مدت‌زمان خدمت است.

$\frac{\lambda}{2}E(S^2)$

۱۲. مسئلهٔ ۳۲ فصل هفتم را مجدداً درنظر بگیرید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت در ایستگاه ۷، متغیر تصادفی باتوزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۳٫۵ و ۵٫۵) است.

۱۳. در مسئلهٔ ۹ احتمال اینکه موقع خارج‌شدن یك قطعه ازسیستم، دوقطعهٔ دیگرهم در آن ایستگاه باشد، چیست؟ احتمال اینکه موقع واردشدن یك قطعه به‌سیستم، دوقطعهٔ دیگر هم درآن ایستگاه باشد، چیست؟

۱۴. مسئلهٔ ۵ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید، با این تفاوت که مدت‌زمان خدمت مشتریهای گروه ۱، ثابت(۶ دقیقه) و زمان خدمت مشتریهای گروه ۲ متغیرتصادفی باتوزیع نرمال (با میانگین ۶ دقیقه وواریانس ۲۰) است.

۱۵. مسئلهٔ ۶ فصل هفتم را مجدداً حل‌کنید؛ با این تفاوت که مدت‌زمان بازرسی چمدانها دارای توزیع یکنواخت درفاصلهٔ ۲ تا ۴ دقیقه است.

۱۶. مسائل ۱ و۳ را مجدداً حل کنید، با این تفاوت که تعداد مسئولین تزریقات به‌جای یکی دونفر باشد.

۱۷. یك مدل $M/G/\infty$ را درنظر بگیرید. تابع توزیع مدت‌زمان خدمت، $B(t)$ فرض

۱۲۵

می‌شود. یك لحظهٔ مشخص مانند s را در نظر بگیرید. ثابت کنید:

الف. احتمال اینکه یکی از مشتریهایی که قبل از لحظهٔ s وارد سیستم شده است، هنوز آن را ترك نکرده باشد، برابر است.

$$p=\frac{1}{s}\int_0^s B(s-x)\,dx$$

ب. احتمال اینکه در لحظهٔ s تعداد n مشتری در سیستم باشد، برابر است،

$$e^{-\lambda ps}\frac{(\lambda ps)^n}{n!}$$

که در آن λ آهنگ ورود مشتری است.

۹

بهینه‌سازی سیستمهای صف

۱.۹ ظرفیت بهینه و هزینه‌های یك سیستم صف

هدف از بهینه‌سازی در سیستمهای صف، تعیین ظرفیت آنهاست، به‌طوری که نه باعث اتلاف بیش از حد وقت مشتریها شود و نه اینکه ظرفیت سیستم آن قدر زیاد انتخاب شود که از سرمایه‌گذاری انجام شده و هزینه‌های عملیاتی مربوط به ارائهٔ خدمت استفادهٔ کامل به‌عمل نیاید. به‌عبارت دیگر، ظرفیت بهینهٔ سیستم ظرفیتی است که مجموع هزینه‌ها را حداقل کند.

در یك سیستم، هزینه‌ها را به‌طور کلی می‌توان به‌دو گروه تقسیم کرد.

الف. هزینهٔ خدمت‌دهی. در هر سیستم، کاهش طول صف و زمان انتظار مشتری از طریق افزایش ظرفیت ارائهٔ خدمت آن امکانپذیر می‌شود. این کار مستلزم تقبل هزینه‌هایی است که صرف خرید و نصب تجهیزات جدید و یا صرف استخدام افراد اضافی برای ارائهٔ خدمت می‌گردد. مثلاً، برای افزایش ظرفیت تخلیهٔ یك بندر، اسکلهٔ جدیدساخته و تجهیزات لازم نظیر جرثقیلها اضافه شود و همزمان با آن به‌استخدام و آموزش افراد جدید اقدام گردد، که همهٔ این امور مستلزم هزینه‌های اضافی است. بنابراین، گسترش ظرفیت توأم با افزایش هزینهٔ بهره‌برداری، نگهداری، استهلاك و خسارت ناشی از رکود سرمایه‌است.

ب. هزینهٔ اتلاف وقت در صف. وقت مشتری از نظر اقتصادی ـ اجتماعی ارزش دارد و اتلاف آن هزینه محسوب می‌شود. در سیستمهای مختلف و بسته به‌نوع مشتریها این ارزشها متفاوت است. برای نمونه، اتلاف ناشی از هرساعت انتظار کشتی در لنگرگاه

برای تخلیه یا بارگیری، هزینهٔ گزافی است که به‌صورت خسارت پرداخت می‌شود. عدم استفاده ازماشینی کـه در کارخانه خراب شده ومنتظر تعمیر است، باعث کاهش میزان تولید خواهد شد. علاوه براینهـا، در سیستمهای تجارتی، درانتظار گذاشتن بیش ازحد مشتری باعث ازدست دادن او وهمچنین ازدست‌دادن سودهای محتمل خواهد شد. دربیمارستان، اتلاف وقت مشتری (مریض) درصف ممکن است به‌قیمت جانش تمام شود.

بدیهی است که دونوع هزینهٔ فوق بـا یکدیگر هم جهت نیستند وافزایش یکی باعث کاهش دیگری می‌شود. بهینه‌سازی سیستم صف بـه‌معنای تعیین ظرفیت آن است، به‌طوری که مجموع هردونوع هزینه حداقل شود. بدیهی است کـه چون عوامل تعیین‌کنندهٔ هزینه ماهیت تصادفی دارند، تنها می‌توان میانگین هزینه‌ها را محاسبه وحداقل کرد.

همان‌طور که درفصلهای قبل مشاهده شد، تعیین ظرفیت سیستم خارج ازمقولهٔ تئوری صف است. درعمل ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌این‌ترتیب تعیین می‌شود که، به‌فرض معلوم‌بودن پارامترهای آن، معیارهـای ارزیـابی (طول صف، زمـان انتظار، ضریب بهره‌وری و...) مشخص و بـراساس آنها، دونوع هزینهٔ فـوق را محاسبه می‌کنند. آن‌گاه، تأثیر تغییرات پارامترها برمعیارهای ارزیابی ودرنتیجه بـرهزینه‌های کل سیستم مجدداً بررسی می‌شود. تغییر پارامترها تا آنجا ادامه پیدا می‌کند، که بالاخره جوابی که هزینه‌ها را حداقل کند به‌دست آید.

۲.۹ تابع هزینه

هزینه‌های یک سیستم صف به‌طور کلی بستگی بـه نوع و ماهیت آن دارد. دراین بخش، بعضی ازانواع هزینه‌ها را، که درسیستمهای مختلف وجود دارد، تشریح می‌کنیم. مواردخاصی نیز وجود دارد که باید جداگانه آنها را بررسی کرد.

عمده‌ترین هزینه‌ها درسیستم صف عبارت‌اند از:

الف. هزینهٔ نگهداری یک خدمت‌دهندهٔ بیکار درواحد زمان (C_1). چـون میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی که مشغول ارائهٔ خدمت هستند، برابر با $(L-L_q)$ است، میانگین کل هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندگان بیکار برابر با $C_1(m-L+L_q)$ است، که در آن m معرف تعداد خدمت‌دهندگان است.

ب. هزینهٔ عملیاتی مربوط به‌یک خدمت‌دهنده که مشغول ارائهٔ خدمت است (C_2). میانگین تعداد خدمت‌دهندگانی کـه مشغول ارائهٔ خدمت هستند، طبق آنچه کـه در بند الف گفتیم برابر با $(L-L_q)$ است و درنتیجه مقدار کل این نوع هزینه برابر با $C_2(L-L_q)$ است.

دربعضی ازسیستمها ممکن‌است C_1 با C_2 برابر باشد، اما لزوماً همیشه چنین نیست.

هزینهٔ سرمایه‌گذاری روی یک خدمت دهنده یا ایجاد فضای سیستم در واحد زمان (C_3). این هزینه شامل هزینهٔ استهلاک و بازگشت سرمایهٔ مصرف‌شده جهت تهیهٔ تجهیزات

وامکانات لازم برای ارائهٔ خدمت است. کل این هزینه‌ها درواحد زمان C_3m است. (اگر C_3 مربوط به هزینهٔ ایجاد فضایی اضافی در سیستم باشد، کل هزینه به صورت C_3K بیان می‌شود)

د. هزینهٔ ازدست‌دادن‌مشتری (C_4). این هزینه را سیستم مـوقعی متحمل می‌شود که به‌دلیل تکمیل ظرفیت یا اتخاذ سیاستهای دیگر ازورود یک مشتری جلوگیری به‌عمل آید، یا اینکه خود مشتری به‌علت تـراکم ازورود به‌سیستم منصرف شود. اگر λ آهنگ مراجعهٔ مشتریها و $\bar{\lambda}$ آهنگ ورود آنها بـه‌سیستم باشد، کل خسارتی کـه سیستم بابت ازدست‌دادن مشتری درواحد زمان متحمل می‌شود، برابر با $C_4(\lambda-\bar{\lambda})$ است.

هـ. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری درصف درواحد زمان (C_5). کل هـزینهٔ اتلاف وقت مشتریها درصف درواحد زمان برابر C_5L_q است.

و. هزینهٔ اتلاف وقت مشتری در هنگام دریافت خدمت درواحد زمان (C_6). کـل هزینهٔ اتلاف وقت‌مشتریهایی که‌درحال دریافت خدمت‌هستند، برابر با $C_6(L-L_q)$ است.

باید توجه داشت که دربسیاری ازموارد $C_5=C_6$ است؛ اما درمواردی میزان این دوهزینه متفاوت است. ضمناً بدیهی است که چهار هزینهٔ نوع اول هزینه‌های ارائهٔ خدمت ودونوع هزینهٔ آخر هزینه‌های مربوط به‌مشتری است. علاوه برهزینه‌های فوق، برحسب‌مورد و شرایط هزینه‌های متعدد دیگری نیز وجود دارند. مثلاً، دریک سیستم که ورود مشتریها به آن به‌صورت گروهی انجام می‌شود، ممکن است هر ورود گروهی هزینه‌ای را نیز در بر داشته باشد (مثلاً هزینهٔ حمل مشتریها یاهزینهٔ پذیرش وثبت اطلاعات). هزینه‌های بالاسری کل سیستم ونظایر اینها را نیز می‌تـوان نام برد. لیکن، بـاتوجه به‌تنوع سیستمهای صف ضروری است که‌درهنگام بررسی هرسیستم، هزینه‌های آن باتوجه به‌شرایط ویژه‌اش به‌طور مشخص مورد مطالعه‌قرارگیرد.

بدین‌ترتیب، بـاتوجه به‌مطالب فوق، درحالت‌کلی تابع هزینهٔ یک سیستم صف را می‌توان به‌شرح زیر بیان‌کرد.

$$C=C_1(m-L+L_q)+C_2(L-L_q)+C_3m+C_4(\lambda-\bar{\lambda})+C_5L_q+C_6(L-L_q) \quad (۱.۹)$$

یا

$$C=(C_1+C_3)m+(-C_1+C_2+C_6)(L-L_q)+C_5L_q+C_4(\lambda-\bar{\lambda}) \quad (۲.۹)$$

دربسیاری ازمدلها، تعدادی ازهزینه‌های فوق‌وجود ندارد. ضمناً همان‌طور که‌گفتیم بعضی ازسیستمها نیزهزینه‌های خاصی دارند، که به‌تابع فوق اضافه می‌شوند.

۳.۹ متغیرهای تصمیم در سیستمهای صف

هر سیستم صف، نظیر سایر سیستمها دارای پارامترهای قابل کنترلی است، که به آنها متغیر تصمیم می‌گویند. با تغییر و تنظیم این متغیرها، ظرفیت سیستم نیز تغییر می‌کند. متغیرهای تصمیم سیستم، طبیعتاً بستگی به نوع وماهیت آن دارد؛ لیکن، عمده‌ترین آنها را می‌توان به‌شرح زیرنام برد:

- تعداد خدمت‌دهندگان
- آهنگ خدمت‌دهی
- آهنگ ورود مشتریان
- ظرفیت صف
- جمعیت مشتریان

همان طور که‌مشاهده می کنیم، متغیرهای تصمیم فوق، عمدتاً همان ورودیهای سیستم‌هستند. بنابراین، چنانچه این ورودیها قابل کنترل باشند، ظرفیت سیستم را نیزمی‌توان تغییرداد. درعمل ممکن است همزمان چند متغیر تصمیم را دراختیار داشته باشیم، که به‌این‌ترتیب در تغییرظرفیت سیستم انعطاف‌پذیری بیشتری وجود خواهد داشت.

دراین بخش، طی مثالهایی نمونه‌های بهینه‌سازی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم.

مثال ۱.۹ تأثیر تغییرات در تعداد خدمت‌دهندگان بر تابع هزینه درمدل $M/M/m$ را بررسی کنید.

حل: در این مدل، چون λ و μ ثابت فرض می‌شود، لذا فقط هزینه‌هایی را منظور می‌کنیم که وابسته به‌تعداد خدمت‌دهندگان، یعنی m باشد. ازطرف دیگر، طبق معادلهٔ بالای صفحهٔ ۱۳۹، $L-L_q=\lambda/\mu$ و مستقل از m است. لذا تابع هزینه به‌شرح زیرخواهدبود.

$$C(m)=(C_1+C_2)m+C_5L_q \qquad (۳.۹)$$

که C_1 و C_2 و C_5، طبق تعاریف بخش قبل به‌ترتیب معرف هزینهٔ نگهداری خدمت‌دهندهٔ بیکار، هزینهٔ‌سرمایه‌گذاری روی یك خدمت‌دهنده وهزینهٔ‌اتلاف وقت مشتری درصف است. هزینه‌هـای مستقل از m، از تـابع هزینه حذف شده است. بـرای تعیین m، تهیهٔ جدولی به‌شرح زیرلازم است.

m	π_0	L_q	$C(m)$

از جدول فوق، مقادیـر $C(m)$ بـه‌ازای مقادیر مختلف m بـه‌دست می آید. بدین‌ترتیب، مقدار بهینهٔ m نیز مشخص می‌شود. بـدیهی است که حداقل مقدار m باید طوری

باشدکه $\rho<1$ شود. از طرفی، درجـدول فوق حداکثر مقدار m نیز محدود خواهد بود، زیرا نشان داده می‌شودکه با افزایش m ابتدا هزینهٔ کل $C(m)$ کاهش می‌یابد و از آن‌پس شروع به افزایش می‌کند. به عبارت دیگر، بـا افزودن تعداد خدمت‌دهنده‌ها ابتدا کاهش هزینه‌های‌مربوط به‌مشتریان قابل توجه‌است، اما به‌تدریج آهنگ کاهش‌آن نسبت به‌افزایش هزینهٔ خدمت‌دهی کمتر می‌شود. بـدین‌ترتیب، افزایش m تـا آنجا ادامه می‌یابد، که کل هزینه‌ها رو به‌کاهش باشد وبه‌محض اینکه افزایش آن شروع شد، متوقف می‌شود.

مثال ۲.۹ تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را دریك‌مدل $M/M/m$، که درآن $\lambda=15$ و $\mu=10$ است، تعیین کنید. فرض می‌کنیم که هزینهٔ هرساعت وقت خدمت‌دهنده ۱۲۵ و هزینهٔ هـر ساعت وقت مشتری ۳۶۰ باشد. (فـرض براین است کـه برای افزایش تعداد خدمت‌دهندگان احتیاج به‌سرمایه‌گذاری نیست ولذا $C_2=0$ است).

حل: دراین‌مدل چون‌مقدار ρ بایدکوچکتر از ۱ باشد، حداقل تعدادخدمت‌دهندگان $m=2$ است. جدول زیر را تهیه می‌کنیم

m	π_0	$C(m)$	L_q
۲	۰٫۱۴۲۸۵	۹۳۴٫۲۸	۱٫۹۲۸۵
۳	۰٫۲۱۰۳	۲۲۵٫۳	۰٫۲۳۶۸
۴	۰٫۲۲۱	۲۹۶٫۱	۰٫۰۴۲۷

همان‌طورکه مشاهده می‌شود، تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان برابربا ۳ است.

مثال ۳.۹ دریك مدل $M/M/m/K$، تأثیر تغییر همزمان m و K را تعیین کنید.

حل: دراین مدل برای افزایش ظرفیت خدمت دهی می‌توان هم تعداد خدمت‌دهنده وهم فضای سیستم را افزایش داد. بـرای به‌دست‌آوردن تابع هزینه، رابطهٔ (۱۰.۹)، باید توجه‌کردکه $L-L_q=\bar{\lambda}/\mu$ است، که $\bar{\lambda}$ معرف آهنگ ورود مشتریان (ونه‌آهنگ ورود مراجعین) است. از طرف دیگر $\bar{\lambda}$ خود تـابعی از K است. بنابراین، درتابع هزینهٔ این مدل، (تابع ۲.۹)، بایـد $\lambda-\bar{\lambda}$ را مساوی π_K وهزینهٔ سرمایه‌گذاری را C_2K (به‌جای C_2m) درنظر گرفت.

مقادیر بهینهٔ m و K را از راه جستجو می‌توان به‌دست آورد. بـا توجه به‌شرایط، معمولاً افزایش K بیش ازمقدار معین مقدور نیست؛ لـذا، اگرحداکثر آن را با $\bar{K}$ نشان دهیم، با توجه به‌اینکه $m\leqslant K$ است، جدولی به‌شرح زیـرتهیه می‌کنیم، که عناصر جدول $C(m,K)$ است.

K/m	۱	۲	....	$\bar{K}$	K^*	$C(m, K^*)$

در این جدول، K^* معرف ظرفیت بهینهٔ سیستم به‌ازای مقدار ثابت m و $C(m, K^*)$ نشاندهندهٔ حداقل کل هزینه‌های سیستم است. به فرض اینکه تعداد خدمت‌دهندگان برابر با m باشد. سپس، حداقل مقادیر $C(m, K^*)$ از ستون آخر جدول به‌دست می‌آید، که به‌این‌ترتیب مقادیر بهینهٔ m و K مشخص می‌شود.

مثال ۴.۹ یک کارگاه تولیدی را در نظر بگیرید، که کارهای سفارشی مشتریان را می‌پذیرد. به‌علت محدودیت فضای انبار، حداکثر تعداد مشتریهایی که پذیرفته می‌شوند محدود است. هدف، تعیین تعداد ماشینهایی که سفارشات مشتریان با آن انجام می‌شود و همچنین تعیین ظرفیت سیستم است، به‌طوری‌که هزینه‌ها حداقل شود. مدت‌زمان خدمت دارای توزیع نمایی بامیانگین ۱۵ دقیقه و ورود مشتریها طبق فرایند پواسون بامیانگین هر ساعت ۱۶ مشتری است. هزینه‌های مختلف به‌شرح زیر است

هزینهٔ ایجاد یک واحد ظرفیت سیستم (درواحد زمان): $C_3 = 10$
(افزایش فضا برای نگهداری یک مشتری جدید)
هزینهٔ عدم استفاده از یک ماشین درواحد زمان: $C_1 = 100$
هزینهٔ عملیاتی یک ماشین درواحد زمان: $C_2 = 200$
سود حاصل از انجام کار مشتری (یا خسارت ازدست دادن مشتری): $C_4 = 300$
خسارت حاصل از تأخیر درانجام کار مشتری (درواحد زمان): $C_5 = C_6 = 150$

حل: تابع هزینهٔ این مدل عبارت است از:

$$C(m, K) = 100m + 10K + 250(L - L_q) + 150L_q + 2800\pi_k$$

ازطرف دیگر،

$$L - L_q = \frac{\bar{\lambda}}{\mu} = \frac{\lambda(1 - \pi_k)}{\mu} = \frac{16}{4}(1 - \pi_k) = 4 - 4\pi_k$$

در نتیجه

$$C(m, K) = 100m + 10K + 150L_q + 2800\pi_k + 1000$$

K/m	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	بهینه K^*
۲	۲۵۵۸	۲۴۰۹	۲۳۳۰	۲۵۲۲	۲۶۲۷	۲۷۸۹	۲۹۲۰	۳۰۹۵	۳۲۵۲	...	...	۳
۳	—	۲۰۴۲	۱۸۲۲	۱۷۵۵	۱۷۶۳	۱۸۱۶	۱۸۹۷	۱۹۹۷	۲۱۱۱	...	...	۵
۴	—	—	۱۶۲۰	۱۳۸۶	۱۲۷۴	۱۲۲۶	۱۲۱۴	۱۲۲۶	۱۲۵۲	۱۲۹۳	۱۳۳۴	۸
۵	—	—	—	۱۳۰۶	۱۱۰۳	۹۹۲	۹۳۷	۹۰۷	۸۹۵	۸۹۴	۹۰۸	۱۱
۶	—	—	—	—	۱۱۰۵	۹۵۶	۸۷۹	۸۴۰	۸۲۲	۸۱۵	۸۱۶	۱۱
۷	—	—	—	—	—	۱۰۰۸	۹۱۷	۸۷۵	۸۵۷	۸۵۳	۸۵۵	۱۱
۸	—	—	—	—	—	—	۹۹۶	۹۲۹	۹۳۳	۹۳۰	۹۳۲	۱۱

عدد ۱۰۰۰ را می‌توان از تابع هزینه حذف کرد، چون متغیرهای تصمیم بر آن تأثیری ندارند. با استفاده ازجدول زیر، تأثیر تغییرات m و K برتابع هزینه بررسی می‌شود.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به‌ازای $m=6$ و $K=11$ حاصل می‌شود و مقدار هزینهٔ بهینه برابر با ۸۱۵ است.

مثال ۵.۹ دریك كارخانه كه دارای ۳۰ ماشین است، هدف تعیین تعداد بهینهٔ تعمیركاران است. مدت‌زمان تعمیر هر ماشین دارای توزیع نمایی با میانگین ۳ ساعت و مدت‌زمانی كه ماشین كار می‌كند (قبل از اینكه خراب‌شود) نیزدارای توزیع‌نمایی بامیانگین ۲۲۰ ساعت است. خسارت قطع تولید هر ماشین ساعتی ۱۰۰۰ تومان وحقوق هر ساعت كار تعمیركار را ۳۰۰ تومان فرض می‌كنیم.

حل: دراین مدل $C=30$، $\mu=1/3$ و $\lambda=1/220$ و $C_1=C_2=300$ و $C_5=C_6=1000$ و $C_3=C_4=0$ است. لذا تابع هزینه عبارت است از:

$$C(m)=300m+1000L$$

برای تعیین m ازجدول زیر استفاده می‌كنیم

m	π_0	L	$C(m)$
۳	۰٫۰۴	۶٫۹۶	۷۸۶۲
۴	۰٫۱۶۸	۳٫۳۷	۴۵۶۹
۵	۰٫۳	۱٫۹۷	۳۴۷۲
۶	۰٫۴	۱٫۳۴	۳۱۴۴
۷	۰٫۴۸	۱٫۰۰۷	۳۱۵۷
۸	۰٫۵۴	۰٫۸	۳۴۰۱

همان‌طور كه مشاهده می‌شود، حداقل هزینه به‌ازای $m=7$ به‌دست می‌آید.

مثال ۶.۹ درطراحی یك پاركینگ، هدف، تعیین فضای آن است. موقعی كه ظرفیت پاركینگ تكمیل باشد، اتومبیلها به‌پاركینگهای دیگر می‌روند و این پاركینگ از سود حاصله محروم خواهد شد. اتومبیلها طبق فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۲۰ دستگاه وارد می‌شوند. مدت توقف هراتومبیل دارای توزیع نمایی با میانگین نیم‌ساعت است. هزینهٔ ایجاد فضا برای پارك اتومبیل (درواحد زمان) برابربا ۲ وسود حاصله درهرساعت برابر با ۵ است.

حل: این مسئله، یك مدل $M/M/m/m$ یا مدل ارلانگی است. دراین مدل، $\lambda=20$، $\mu=2$، $C_3=2$ و $C_4=5$ و $C_1=C_2=C_5=C_6=0$ است. تابع هزینه دراین مدل به‌شرح زیراست:

$$C(m)=2m+200\pi_m$$

برای به‌دست‌آوردن m ازجدول زیراستفاده می‌كنیم.

m	π_m	$C(m)$
۲۵	۰٫۰۵	۶۰٫۱
۲۶	۰٫۰۳۷	۵۹٫۴۳
۲۷	۰٫۰۲۶	۵۹٫۳۶
۲۸	۰٫۰۱۸	۵۹٫۷۵

بنابراین، تعداد بهینهٔ اتومبیل در پاركینگ برابر با ۲۷ است.

مثال ۷.۹ دریك مدل $M/M/1$، خدمت‌دهنده ماشینی است كه می‌توان سرعت آن را تنظیم كرد. اگر آهنگ خدمت را μ فرض كنیم، هزینهٔ عملیاتی وهمچنین هزینهٔ بیكاری هرماشین بستگی به μ دارد، كه آن را با $f(\mu)$ نشان می‌دهیم.

حل: باتوجه به‌اینكه تنها متغیر تصمیم دراین مدل μ است، تابع هزینهٔ مربوط به‌شرح زیرخواهد بود:

$$C(\mu)=f(\mu)+C_5L_q+C_6(L-L_q)$$

به‌جای L و L_q مقادیر مربوطه را جایگزین می‌كنیم، درنتیجه

$$C(\mu)=f(\mu)+\frac{C_5\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}+C_6\frac{\lambda}{\mu}$$

برای به‌دست آوردن حداقل آن، از رابطهٔ فوق مشتقگیری می‌كنیم (به‌شرط اینكه $C(\mu)$ قابل مشتقگیری باشد). درنتیجه،

$$\frac{dC(\mu)}{d\mu}=f'(\mu)-\frac{C_5\lambda^2(2\mu-\lambda)}{\mu^2(\mu-\lambda)^2}-\frac{C_6\lambda}{\mu^2}=0$$

درحالت خاص كه $C_5=C_6$ باشد، نتیجه‌می‌شود كه به‌ازای مقدار بهینهٔ μ

$$f'(\mu)=\frac{C_5\lambda}{(\mu-\lambda)^2}$$

$f(\mu) = a\mu + b$

اگر $f(\mu)$ تابعی خطی از μ، مثلاً $f(\mu) = a\mu + b$ باشد،

$$a = \frac{C_5 \lambda}{(\mu - \lambda)^2}$$

که به‌این‌ترتیب مقدار بهینهٔ μ به‌دست می‌آید.

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{\frac{C_5 \lambda}{a}} \qquad (۲.۹)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، دراین مدل $\lambda < \mu^*$، یعنی $\rho < 1$ است.

مثال ۸.۹ دریك خط تولید، سرعت ماشینی را می‌توان تغییر داد. تعداد قطعات تولید شده با این ماشین بین ۶۰ تا ۹۰ قطعه درساعت است. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین هر ساعت ۲۰۰۰ تومان است، به‌شرط اینکه باحداقل سرعت‌کار کند. ولی چنانچه سرعت‌آن افزایش یابد، هزینه نیز متناسباً وبا رابطه‌ای خطی افزایش خواهد یافت. هزینهٔ ادارهٔ این ماشین باحداکثر سرعت برابر با ۲۶۰۰ تومان است. اگر تعداد قطعاتی‌که برای تولید سفارش می‌شود، طبق توزیع پواسون با میانگین ۵۰ قطعه در ساعت، وخسارت حاصل از تأخیرکار درهرساعت برابربا ۲۵۰ تومان باشد، سرعت بهینهٔ ماشین را تعیین کنید.

حل: دراین مدل $f(\mu) = 20\mu + 800$ است.

به‌این‌ترتیب، $a = 20$، $b = 800$ و $\lambda = 50$ و $C_5 = 250$ است. طبق رابطهٔ (۲.۹)

$$\mu^* = 75$$

۴.۹ انتخاب محل سیستم صف

فرض‌کنید جمعیت مشتریان بالقوهٔ یك سیستم در منطقه‌ای پراکنده باشند. رفت و برگشت این مشتریان مستلزم صرف‌وقت ودر نتیجه هزینه‌است. هدف، تعیین محل یا محلهای مناسب استقرار سیستم است، به‌طوری‌که کلّ هزینه‌ها، که شامل هزینهٔ رفت و برگشت مشتریان نیز می‌شود، حداقل شود. بنابراین، برای محاسبهٔ میزان هزینه، لازم است که میانگین زمان رفت وبرگشت مشتریان نیز تعیین گردد.

توزیع جمعیت مشتریان

فرض می‌شود که متقاضیان دریافت خدمت (مشتریان)، در منطقهٔ موردنظر به‌طور یکنواخت پراکنده هستند.

معیار تعیین فاصله

دونقطهٔ هندسی A و B با مختصات (a, b) و (a', b') را درنظربگیرید. فاصلهٔ بین این دونقطه را برحسب نیاز وشرایط، با معیارهای مختلف می‌توان اندازه‌گیری کرد. دومعیار مهم اندازه‌گیری فاصله عبارت‌اند از:

الف. فاصلهٔ هندسی بین دونقطه، یعنی

$$d = [(a - a')^2 + (b - b')^2]^{0.5}$$

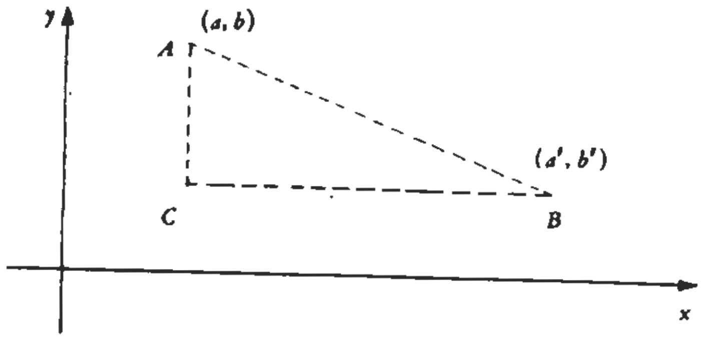
(درشکل ۱.۹، فاصلهٔ مستقیم AB، معرف فاصلهٔ هندسی است.)

ب. فاصلهٔ خطی که فرض می‌شود، مشتری در امتداد محورهای مختصات حرکت می‌کند. برای نمونه، دریك شهررفت وآمد درامتداد خیابانها ویا دریك کارخانه‌درامتداد جاده‌ها ومسیرهای مشخص انجام می‌شود. درشکل ۱.۹، فاصلهٔ خطی بین دونقطهٔ A و B عبارت ازمجموع فواصل AC و CB وبرابراست با

$$d = |X| + |Y| = |a - a'| + |b - b'|$$

که $|X|$، فاصله درامتداد محور xها و $|Y|$، فاصله درامتداد محور y هاست؛ یعنی، برای محاسبهٔ $|X|$، که میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مبدأ مختصات درامتداد محور x هاست، از رابطهٔ احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. بادرنظرگرفتن اینکه‌مشتریان، طبق توزیع‌یکنواخت درداخل مستطیل پراکنده‌اند، احتمال اینکه یك مشتری درسمت راست یا چپ محور y ها قرارداشته باشد، به‌ترتیب برابربا $a/a+b$ و $b/a+b$ است. از طرف دیگر، میانگین فاصلهٔطی‌شده توسط‌مشتری سمت‌راست وچپ محور y ها، به‌ترتیب $a/2$ و $b/2$ است؛ لذا،

$$|X| = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a^2 + b^2}{2(a+b)} \qquad (۵.۹)$$



شکل ۱.۹ فاصلهٔ هندسی وخطی بین دونقطه

بههمین ترتیب،

$$|Y| = \frac{c^2 + d^2}{2(c+d)}$$

ومیانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت هرمشتری عبارت است از:

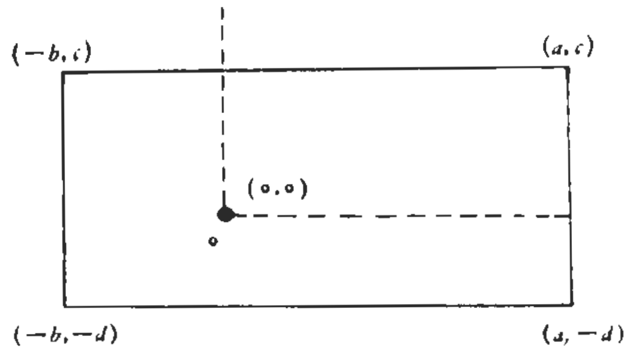
$$E(T) = 2|X| + 2|Y| = \frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{c^2+d^2}{c+b}$$

چنانچه تعیین‌محل ایستگاه خدمت مدنظر باشد، باید a و b و c و d را طوری تعیین کردکه $E(T)$ حداقل شود. بایدتوجه داشت که $a+b$ برابربا $|X| = CB$ و $|Y| = AC$ است. علت به‌کارگرفتن قدرمطلق نیز مثبت بودن فاصله‌هاست.

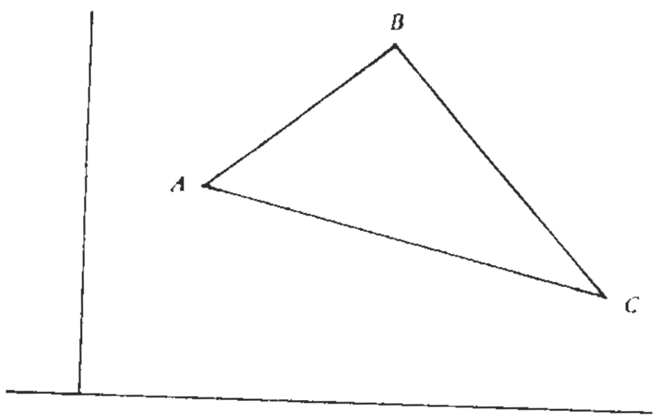
مثال ۹.۹ فرض کنید مشتریان یك‌سیستم درداخل یك مستطیل، طبق توزیع یکنواخت پراکنده‌اند. ایستگاه‌خدمت درنقطه‌ای درداخل این مستطیل‌قراردارد. میانگین فاصلهٔ رفت وبرگشت یك مشتری را به‌دست‌آورید. اگر هدف، حداقل کردن این کمیت باشد، بهترین نقطهٔ استقرار ایستگاه خدمت کجاست؟

حل: ایستگاه خدمت‌را به‌عنوان‌مبدأ مختصات جدیدتعیین‌می‌کنیم.مختصات گوشه‌های مستطیل روی شکل نشان داده شده است. حال فرض کنید، یك مشتری مشخص درنقطه‌ای به‌مختصات (x, y) قرار گرفته باشد. مسافت خطی که‌این مشتری باید درامتداد محور xها طی‌کند، برابربا $|X|$ (طول مستطیل)،و $c+d$ برابر با عرض مستطیل و ثابت است، لذا $E(T)$ به‌ازای $a=b$ و $c=d$ حداقل می‌شود. به‌عبارت دیگر، بهترین نقطه برای استقرار ایستگاه خدمت، مرکز مستطیل است.

مثال ۱۰.۹ جمعیت‌مشتریان درداخل‌مثلث ABC، طبق‌توزیع‌یکنواخت‌پراکنده‌اند. اگر ایستگاه خدمت، درنقطه‌ای خارج ازمثلث قرار گرفته باشد، میانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا ایستگاه خدمت را محاسبه کنید.



شکل ۲.۹ مربوط به‌مثال ۹.۹



شکل ۳.۹ پراکندگی مشتریان مثال ۱۰.۹

حل: ایستگاه‌خدمت را به‌عنوان مبدأ مختصات انتخاب می‌کنیم.مختصات رئوس‌مثلث نسبت به‌این مبدأ مختصات (a, a') و (b, b') و (c, c') خواهد بود. اگرمیانگین فاصلهٔ خطی هر مشتری تا مبدأ مختصات را با استفاده ازاحتمال شرطی به‌دست‌آوریم، به‌سادگی معلوم می‌شود که می‌توان فرض کرد که تمام مشتریها درمرکز ثقل مثلث (در محل تقاطع میانه‌ها) قراردارند، که فاصلهٔ آن تاهررأس دوبرابرفاصلهٔ آن تاضلع مقابل مربوط به‌همان رأس است. لذا، دراین مثال‌مختصات نقطهٔ‌تقاطع میانه برابر است با $(a+b+c)/3$ و $(a'+b'+c')/3$ و درنتیجه، میانگین‌فاصلهٔ مشتری تا ایستگاه خدمت (مبدأ مختصات) برابراست با:

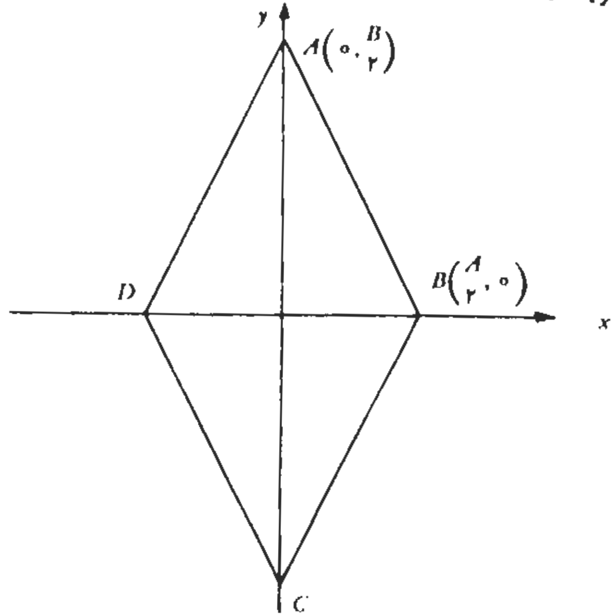
$\left[\frac{a+b+c}{3}, \frac{a'+b'+c'}{2}\right]$

$$|X| + |Y| = \frac{1}{3}(a+b+c+a'+b'+c')$$

مثال ۱۱.۹ مشتریان یك‌سیستم صف به‌طوریکنواخت درداخل یك‌لوزی باقطرهایی به‌طول A و B، مطابق شکل ۴.۹ پراکنده‌اند وایستگاه خدمت مربوط به‌آن نیز در مرکز لوزی قراردارد. میانگین فاصلهٔ هرمشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست‌آورید.

حل: دراینجا نیزمبدأ مختصات را برایستگاه خدمت منطبق می‌کنیم. مختصات‌رئوس لوزی در شکل نشان داده شده است. برای محاسبهٔ $|X|$، از احتمال شرطی استفاده می‌کنیم. مشتریها یا درسمت راست محور yها (یعنی درمثلث ABC) ویا درسمت چپ آن (یعنی درمثلث ADC) قراردارند. مساحت این دومثلث باهم برابراست، ولذا مشتری با احتمال ۰٫۵ می‌تواند در هرکدام ازمثلثها قرارداشته باشد. میانگین فاصلهٔ مرکزثقل هر مثلث تا مبدأ مختصات، درامتداد محور xها برابربا $A/6$ است. به‌این‌ترتیب

$$|X| = \frac{1}{2} \times \frac{A}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{A}{6} = \frac{A}{6}$$



شکل ۴.۹ پراکندگی مشتریان، مثال ۱۱.۹

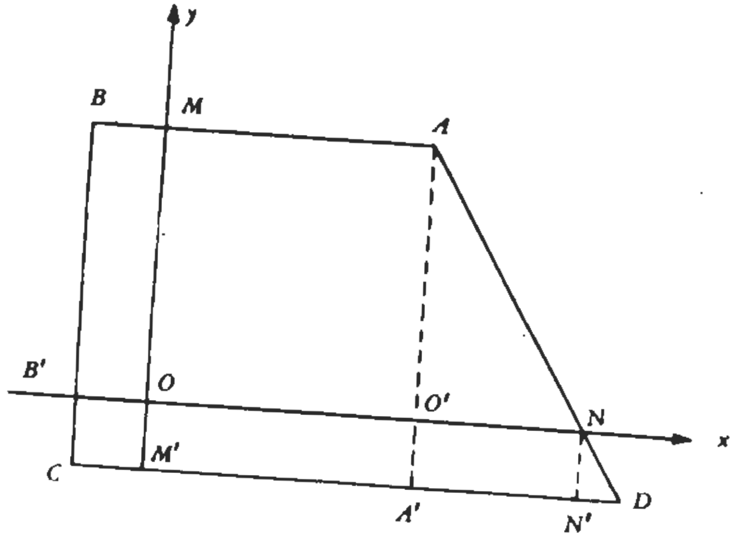
به‌همین ترتیب، $|Y|$ به‌دست می‌آید. لذا،

$$|X|+|Y|=\frac{A+B}{6}$$

باید توجه داشت‌که دراین مثال نمی‌توان فرض‌کرد کـه مرکز ثقل همهٔ مشتریها درمرکز لوزی قراردارد، زیرا جهت حرکت مشتریها دردومثلث بایکدیگرمتفاوت است. واگر کل لوزی را یکجا درنظر بگیریم، جهت حرکت مخالف مشتریها، بـاعث می‌شودکه میانگین فاصلهٔ آنها برابربا صفرشود،که این امرصحیح نیست.

مثال ۱۲.۹ مشتریهای یك سیستم صف داخل ذوذنقه $ABCD$ پراکنده‌اند وایستگاه خدمت در داخل آن، مطابـق شکل۵.۹ قـرار دارد. مختصات رئوس ذوذنقه (۲ ، ۵)، (۲ ، ۲ —) و(۱ — ، ۲ —) و (۱ — ، ۷) است. میانگین فاصلهٔ هرمشتری تا ایستگاه خدمت را به‌دست آورید.

حل: برای محاسبهٔ $|X|$ ازاحتمال شرطی استفاده مـی‌کنیم. مشتریها یـا درمستطیل $BCM'M$ یا درمستطیل $MM'A'A$ و یا درمثلث $AA'D$ قراردارند. احتمال بودن یك مشتری در هرکدام ازاین سه قسمت، متناسب بـا مساحت آنها یعنی ۶/۲۲ و ۱۵/۲۲ و ۳/۲۲ است. میانگین فاصلهٔ افقی مرکز ثقل این سه‌قسمت تا مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱، ۲٫۵ و ۱۷/۳ است. به‌این‌ترتیب،



شکل ۵.۹ پراکندگی مشتریان مثال ۱۲.۹

$$|X|=\frac{۶}{۲۲}(۱)+\frac{۱۵}{۲۲}(۲٫۵)+\frac{۳}{۲۲}\left(\frac{۱۷}{۳}\right)=۲٫۵۲$$

به‌همین ترتیب، برای محاسبهٔ $|Y|$، ذوذنقه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم،که‌عبارت‌اندار: مستطیل $B'BAO'$، مستطیل $B'CN'N$، مثلث $AO'N$ و مثلث NND. احتمال بـودن مشتریها در این قسمتها به‌ترتیب بـرابـر با ۱۲/۲۲، ۳۵/۷۲، ۲/۷۲، ۱/۷۲ است. میانگین فاصلهٔ عمودی مرکزثقل این قسمتها با مبدأ مختصات به‌ترتیب برابر با ۱ و ۰٫۵ و ۲/۳ و ۲/۳ است. لذا

$$|Y|=\frac{۱۲}{۲۲}(۱)+\frac{۲۵}{۷۲}(۰٫۵)+\frac{۲}{۷۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)+\frac{۱}{۷۲}\left(\frac{۲}{۳}\right)=۰٫۸۰۳$$

مثال ۱۳.۹ درسطح یك شهربزرگ،که جمعیت آن به‌طور یکنواخت پراکنده است، می‌خواهیم تعدادی ایستگاههای خدمت مشابـه ایجادکنیم. منطقهٔ تحت پـوشش هرایستگاه دارای مساحتی برابربا S است ومی‌تواند مربع یالوزی (باقطرهای‌مساوی) باشد. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا مرکزخدمت درکدام ازدوشکل فوق‌الذکرکمتراست.

حل: چون مساحت هـر منطقه برابر با S است؛ لذا، طول هر ضلع مربع برابر با $\sqrt{S}$ وطول هرقطرلوزی برابربا $\sqrt{2S}$ است. طبق نتایج مثال ۹.۹، درمورد مربع،

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{S}}{2}$$

وطبق نتیجهٔ مثال ۱۱.۹، درمرزلوزی

$$|X|+|Y|=\frac{\sqrt{۲S}}{۳}$$

همان طور که‌مشاهده می‌شود، میانگین فاصلهٔ طی‌شده توسط یك مشتری درمنطقه‌ای به‌شکل لوزی‌کمتر ازهمین فاصله درمنطقه‌ای به‌شکل مربع است.

درحالت‌کلی ثابت می‌شودکه اگر بخواهیم منطقهٔ بزرگی را به‌مناطق کوچکتر تقسیم ودر هر کدام یك ایستگاه خدمت مستقرکنیم، بهترین روش این است که منطقه را به‌تعدادی مناطق کوچکتر به‌شکل لوزی تقسیم کنیم و ایستگاههای خدمت درمراکز این‌لوزیها قرار گیرد. ضمناً اگرمعیارسنجش فاصلهٔ هندسی‌باشد، منطقه را باید به‌تعدادی دایره تقسیم‌کرد.

مسائل

۱. درمسئلهٔ ۲۷ فصل ۶، اگرحقوق تعمیرکارساعتی ۳۰۰ تومان وهزینهٔ قطع تولید به‌ازای هرماشین ـ ساعت ۲۰۰۰ تومان باشد، تعداد بهینهٔ ماشینهای تحت مسئولیت این تعمیرکار چقدر است؟

۲. درانبار ابزار یك کارخانـه M نفرکار می‌کنند. مدت‌زمانی کـه هرکارمند انبار برای بررسی و تحویل ابزار صرف می‌کند، متغیری تصادفی با توزیع نمایی و با میانگین ۸ر۵ دقیقه‌است. میانگین فاصلهٔ زمانی بین دومتقاضی ابزار، که طبق توزیع نمایی فرض‌می‌شود، ۱ر۵ دقیقه‌است. حقوق وسایرهزینه‌های مربوط به‌هرکارمند ۱۵۰ تومان درساعت وحقوق تکنیسینهایی‌که مراجعه می‌کنند (وهزینه‌های ناشی از تعطیل‌کار آنها) ۴۰۰ تومان درساعت فرض می‌شود. مقدار بهینهٔ M را تعیین‌کنید.

۳. دریك سیستم صف، که ورود مشتریها طبق‌فرایند پواسون بامیانگین هرساعت ۱۰مشتری است، یکی ازدوخدمت‌دهنده را می‌تـوان استخدام کرد، که دستمزدآنها به‌ترتیب ساعتی ۷۰ و ۹۰ تومان است. مدت زمان خدمت توسط خدمت‌دهندهٔ اول و دوم به‌ترتیب دارای توزیع نمایی (بامیانگین ۴ دقیقه) وتوزیع نرمال (بامیانگین ۳ دقیقه و انحراف معیار ۱ دقیقه) است. هزینهٔ وقت مشتری هر ساعت ۱۲۰ تـومان است. کدام خدمت‌دهنده مناسبتر است؟

۴. دریك کارخانه، هرماشین مدتی‌کار می‌کند وبعد از آن احتیاج به‌تعمیردارد. مدت‌زمان کارکردن وهمچنین تعمیرآن متغیرهای تصادفی نمایی با میانگین به‌ترتیب، ۸ ساعت و۴۵ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرماشین بسته بـه اینکه درحال کار یـا درحال تعمیرباشد، به‌ترتیب ۱۵۰۰ تومان و ۸۰۰ تومان است. تعداد بهینهٔ ماشینهایی که یك‌نفرکارگر مسئول تعمیر آنهاست، چقدراست؟ اگر کلاً ۲۰ ماشین وجودداشته‌باشد ویك‌کارگرمسئول‌ماشینهای مشخص‌نباشد، بلکه هرکارگربتواند به‌تعمیر هرماشین خراب بپردازد، تعداد بهینهٔ کارگران موردنیاز را تعیین‌کنید:

۵. درمسئلهٔ ۴، اگر هزینهٔ نگهداری هر ماشین، صرف‌نظر ازاینکه کاربکند یا نکند، برابر با ۱۵۰۰ تومان باشد، به سؤالات مطرح‌شده دربالا مجدداً پاسخ دهید.

۶. دریك سیستم صف مشتریها طبق‌فرایند پواسون (بامیانگین هرساعت ۱۲ مشتری) وارد می‌شوند. مدت‌زمان خدمت دارای‌توزیع نرمال (بامیانگین ۴ دقیقه وانحراف معیار ۱ر۵ دقیقه) است. هـرساعت وقت مشتری ۲ برابر وقت خدمت‌دهنده ارزش دارد. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را طوری تعیین‌کنید که‌کل هزینه‌ها حداقل شود.

۷. می‌خواهیم تعداد بهینهٔ‌ماشینهای فتوکپی موردنیازمؤسسه‌ای را تعیین‌کنیم. تعدادکارهای فتوکپی این مؤسسه دارای‌توزیع پواسون (بامیانگین هرساعت ۶۰ کار) ومدت‌زمان چاپ هرکاری دارای توزیع‌نمایی بـا میانگین ۱۰ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرماشین، شامل استهلاك وحقوق متصدی ماشین هـرساعت ۵۰۰ تـومان ومستقل ازتعداد کار چاپ شده با ماشین است. میانگین هزینهٔ کاغذ و سایـر هزینه‌های متغیر هرکار برابربا ۴۰ تومان است. چنانچه‌کاری برسد و مـاشین فتوکپی بیکار نباشد، بلافاصله به‌صورت سفارش به‌بیرون از مؤسـه ارسال می‌شود. میانگین هزینهٔ هرکار فتوکپی درخارج ازمؤسسه ۱۸۰ تومان‌است. باهدف حداقل‌کردن هزینه، چند ماشین فتوکپی لازم است؟

۸. درمسئلهٔ ۷، اگر مدت‌زمـان چاپ دارای تـوزیع یکنواخت درفاصلهٔ (۸, ۱۲) باشد، به‌سؤال مطرح‌شده مجدداً پاسخ دهید.

۹. به‌یك بندرهرروز به‌طورمتوسط ۵کشتی طبق توزیع پواسون وارد می‌شوند. هزینه‌های روزانهٔ مربوط به‌یك اسکله برابربا نصف خسارت روزانه‌ای‌است‌که به‌یك‌کشتی، که‌منتظر تخلیه است، پرداخت می‌شود (بابت زمان تخلیه، خسارتی پرداخت نمی‌شود). مدت‌زمان تخلیهٔ هرکشتی دارای توزیع نمایی با میانگین یك روزاست. تعداد بهینهٔ اسکلهٔ موردنیاز این بندر را تعیین‌کنید.

۱۰. به‌یك پمپ‌بنزین هر ساعت، به‌طور متوسط ۱۲۵ اتومبیل طبق فرایند پواسون مراجعه می‌کنند. مدت زمـان خدمت، نمایی بـا میانگین ۳۰ دقیقه فرض می‌شود. سود حاصل از فروش بنزین به‌هر اتومبیل ۲۰ تـومان وهزینه هردستگاه ~~اتومبیل~~ ساعتی ۳۵ تومان است. اگر طول صف زیاد بـاشد، بعضی ازمشتریها، طبق جدول زیر، ازورود به‌این پمپ بنزین منصرف می‌شوند.

پمپ سری

۱۲۹

طول صف	درصد مشتریهایی که از ورود منصرف می‌شوند.
۱۰ – ۵	۵
۱۵ – ۱۱	۲۰
۲۰ – ۱۶	۴۰
۲۵ – ۲۱	۶۰
بیش از ۲۶	۸۰

تعداد بهینهٔ پمپها را محاسبه کنید

۱۱. یک مدل $M/M/m$ که آهنگ ورود و خدمت در آن به‌ترتیب ۸ و ۱۲ است، را درنظر بگیرید. هزینهٔ نگهداری هر خدمت‌دهنده هر ساعت ۳۵۰ تومان است. چنانچه فقط یک مشتری درسیستم باشد، خسارت پرداخت شده به او ساعتی ۸۰۰ تومان است. اما اگر بیش ازیک مشتری درسیستم باشد، به سایر مشتریها (ازمشتری شمارهٔ ۲ به‌بعد) خسارتی معادل با ساعتی ۱۰۰۰ تومان پرداخت می‌شود. تعداد بهینهٔ خدمت‌دهندگان را تعیین کنید.

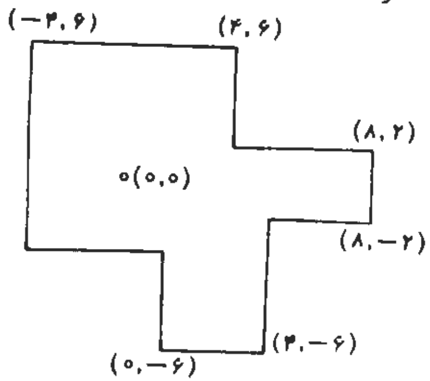
۱۲. دریک ایستگاه، که به‌بازرسی قطعات ساخته‌شده می‌پردازد، می‌توان یکی از دو روش بازرسی را انتخاب کرد. در روش اول، که هزینهٔ آن ۱۵۰۰ تومان است، مدت‌زمان بازرسی دارای توزیع‌نمایی با میانگین نیم ساعت است. درروش دوم، که هزینهٔ آن معادل ۱۲۰۰ است، بازرسی از دوفعالیت مستقل تشکیل می‌شود، که مدت زمان اجرای هرکدام ازآنها دارای توزیع ارلانگی با پارامتر $r=2$ است. میانگین مدت زمان فعالیتهای اول و دوم این روش، به‌ترتیب، برابر با ۱۲ و ۲۲ دقیقه است. تعداد قطعاتی که برای بازرسی به‌این ایستگاه می‌رسند، براساس فرایند پواسون است ومیانگین فاصلهٔ رسیدن دوقطعهٔ متوالی ۲۰ دقیقه فرض می‌شود. خسارت حاصل ازدیررسیدن هرقطعه برابر با ۸۰۰ تومان است. کدام روش ازنظرهزینه بهتراست؟

۱۳. یک سیستم صف با یک خدمت‌دهنده را درنظر بگیرید، ورود مشتریها گروهی است. زمان بین ورود دوگروه متوالی، دارای توزیع‌نمایی باامیانگین ۲۵ دقیقه است. تعداد مشتریهای هر گروه‌هم متغیر تصادفی پواسون بامیانگین ۶ مشتری فرض می‌شود. مدت‌زمان خدمت نیزنمایی بامیانگین ۳ دقیقه است. هزینهٔ نگهداری هرمشتری درساعت بسته‌به‌اینکه درصف باشد یا درحال خدمت، به‌ترتیب، برابر با ۳۰۰ و ۵۰۰ است. میانگین هزینهٔ این سیستم را درساعت محاسبه کنید.

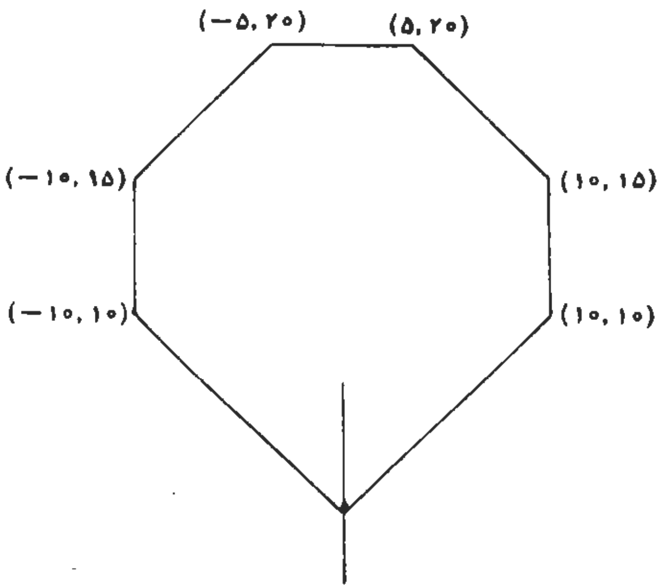
۱۴. درکارگاهی قطعات سفارشی، با ماشینی که سرعت آن قابل تنظیم است، ساخته می‌شود. مدت‌زمان ساختن هرقطعه، دارای توزیع نمایی است ومیانگین آن بین ۵ تا ۱۵ دقیقه قابل تنظیم است. هزینهٔ ساخت قطعه، بستگی به‌سرعت ماشین دارد. اگر میانگین زمان ساخت قطعه، x دقیقه باشد، هزینهٔ ساخت آن درهر دقیقه برابر با $300x^{-2}$ است.

خسارت دیرکرد ساخت هر قطعه در دقیقه برابر با ۶۰۰ است. ورود قطعات به کارگاه بر اساس فرایند پواسون (با میانگین هر ۱۸ دقیقه یک‌بار) است. سرعت بهینهٔ ماشین را حساب کنید.

۱۵. ایستگاه خدمت درمبدأ مختصات شکل زیرقراردارد. مختصات گوشه‌ها نیزنشان داده شده است. مشتریان در کل مساحت مربوطه، طبق توزیع یکنواخت، پراکنده شده‌اند. میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت تعیین کنید.



۱۶. درشکل زیر، با فرض پراکندگی یکنواخت مشتریان در سطح کل آن، میانگین فاصلهٔ یک مشتری را تا ایستگاه خدمت، که برمبدأ مختصات منطبق است، محاسبه کنید.



۱۳۰

۱۷. کارگاهی به‌شکل‌مستطیل را درنظربگیرید که ابعاد آن ۸۰ × ۵۰ متر است. می‌خواهیم چند انبار ابزار در این کارگاه بسازیم. محلهای مناسب برای ایجاد انبار، نقاط وسط ضلعهای مستطیل است. مشتریان انبار، تکنسینها و کارگران هستند، که درسطح کارگاه به‌طور یکنواخت پراکنده‌اند. هرمتقاضی ابزار به‌نزدیکترین انبار مراجعه می‌کند. میانگین فاصلهٔ یك مشتری تا انبار را درحالتهای زیرمحاسبه کنید:

الف. فقط یك انبار دروسط ضلع بزرگ مستطیل ایجاد شود.

ب. فقط یك انبار دروسط ضلع کوچك مستطیل ایجاد شود.

ج. دوانبار دروسط ضلعهای بزرگ مستطیل ایجاد شود.

د. دوانبار دروسط ضلعهای کوچك مستطیل ایجاد شود.

هـ. یك انبار دروسط ضلع کوچك ویکی دروسط ضلع بزرگ ایجادشود.

و. چهارانبار دروسطهای اضلاع مستطیل ایجاد شود.

مرجعها

1. Cinlar, Erhan; *Introduction to Stochastic Process,* Printice Hall, New York, 1975.
2. Cooper, Robert B.: *Introduction to Queueing Theory,* 2nd edition, Elsevier North – Holland, New York, 1981
3. Gross, D. & C.M. Harris: *Fundamentals of Queueing,* 2nd edition, Wiley, New York, 1984.
4. Hillier, F.S. & G.J. Lieberman: *Introduction to Operations Research,* 4th ed., Holden – Dey Inc., Oakland, 1986.
5. Hines, W. W. & D. C. Montgomery: *Probability & Statistics in Engineering & Management Science,* 2nd. ed., John Wiley & Sons, New York, 1980.
6. Karlin S. & H. Taylor: *First Course in Stochastic Processes,* 2nd ed., Academic Press, New York, 1975.
7. Kleinrock, L.: *Queueing System. Vol. I, Theory,* Wiley New York, 1975.
8. Kleinrock, L.: *Queueing Systems, Vol I: Theory.* Wiley, New York, 1975.
9. Newell, G. F.: *Applications of Queueing Theory,* 2nd ed., Chapman & Hall, London, 1982.
10. Parzen, E.: *Modern Probability Theory & its Application,* Wiley, New York, 1960.
11. Ross S. M.: *Applied Probability Models With Optimization*

Applications, Holden – Day, Inc., Sanfrancisco, 1970.

12. Ross, S. M.: Introdution to Probability Models, 3rd ed., Academic Press, New York, 1985.

13. White, J. A., J. W. Schimidt & G. K. Bennett: *Analysis of Queueing Systems*, Academic Press, New York, 1975.

واژه‌نامه

آهنگ خروج	departure rate
آهنگ ورود	arrival rate
احتمال شرطی	Conditional probability
استنتاج لیتل	Little's result
افزایش مستقل	independent increment
الگوی خدمت‌دهی	service pattern
امتناع	balking
امید ریاضی	expected value
امید شرطی	conditional expectation
انحراف معیار	standard deviation
به‌ترتیب	firstin - firstout
بهینه‌سازی	optimization
پیچش	convulution
پیشامدهای مستقل	independent events
پیشامدهای وابسته	dependent events
تابع چگالی	density function
تابع توزیع احتمال	probability distribution function
تابع توزیع تجمعی	cumulative distribution function
تابع توزیع توأم	joint distribution Function

تابع محدب	convex Function
تابع مولدگشتاور	moment generation Function
تقریب	approximation
توزیع ارلانگی	Erlangen distribution
توزیع برنولی	Bernoulli distribution
توزیع پواسون	poisson distribution
توزیع حاشیه‌ای	marginal distribution
توزیع حدی	limiting distribution
توزیع دوجمله‌ای	binomial distribution
توزیع فوق نمایی	hyper_exponential distribution
توزیع قطعی	deterministic distribution
توزیع گاما	Gamma distribution
توزیع نرمال	normal distribution
توزیع نمایی	exponential distribution
توزیع هندسی	geometric distribution
توزیع یکنواخت	uniform distribution
جمعیت مشتریان بالقوه	customers population
چرخهٔ اشتغال سیستم	busy cycle
حالت ارگودیك	ergodic state
حالت برگشت‌پذیر تهی	null recurrent state
حالت برگشت‌پذیر مثبت	positive recurrent state
حالت پایدار	steady - state
حالت جاذب	absorbing state
حالت سیستم	state of the system
خدمت‌دهنده	server
خدمت گروهی	bulk service
دورهٔ اشتغال سیستم	busy period
زمان انتظار	waiting time
زمان بین دو ورود	inter-arrival time

زنجیرهٔ مارکوف بازمان پیوسته	continuous time Markov chain
زنجیرهٔ محاطی مارکوف	imbeded Markov chain
سری	series
شبکه‌های صف	networks of queue
صف	queue, waiting line
ضریب بهره‌وری	utilization factor
ظرفیت متناهی	finite capacity
ظرفیت نامتناهی	infinite capacity
فرایند پواسون	poisson process
فرایند تولد خالص	pure birth process
فرایند تصادفی	stochastic process
فرایند مارکوف	Markov process
فرمول بیز	bayes' formula
فضای نمونه	sample space
قانون اعداد بزرگ	law of large numbers
قضیهٔ حد مرکزی	central limit theorem
کوواریانس	covariance
ماتریس آهنگ‌گذار	transition rate matrix
ماتریس گذار	transition matrix
ماتریس مارکوف	Markov matrix
ماتریس مربع	square matrix
ماتریس یکه	unit matrix
متغیرهای تصادفی مستقل	independent random variables
مجموعهٔ قابل شمارش	countable set
مدل پولیا	polya model
مدلهای نمایی	exponential models

۱۳۲

communication of states	مرتبط بودن حالتها
backward equation	معادلهٔ پسرو
forward equation	معادلهٔ پیشرو
difference equation	معادلهٔ تفاضلی
differential equation	معادلهٔ دیفرانسیل
Kolmogorov equation	معادلهٔ کولموگروف
characteristic equation	معادلهٔ مشخصه
mean recurrence time	میانگین زمان برگشت
aperiodic	نادوره‌ای
system Discipline	نظم سیستم
rate diagram	نمودار آهنگ
variance	واریانس
convergence	همگرایی
homogenous	همگن

۱۳۴